

W. Ochs

1968

ÜBER DIE MÖGLICHKEIT EINER KONSISTENTEN WIENER-SIEGELSCHEN

FORMULIERUNG DER QUANTENTHEORIE

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung des Doktorgrades

der Naturwissenschaftlichen Fakultät der

Johann Wolfgang Goethe-Universität

zu Frankfurt am Main

vorgelegt von

Wilhelm Ochs

aus Frankfurt am Main

Frankfurt am Main 1968

Gedruckt mit Genehmigung der Naturwissenschaftlichen

Fakultät der Universität Frankfurt am Main

Dekan : Professor Dr.W. Martienssen

Erster Berichterstatter : Professor Dr.G. Süßmann

Zweiter Berichterstatter : Professor Dr.H. Bilz

Tag der Mündlichen Prüfung : 26/30 Juli 1968

Inhaltsverzeichnis

1. <u>Einleitung und Übersicht</u>	1
2. <u>Darstellung und Kritik der Differentialraum-Quantentheorie</u>	
2.1 Die physikalischen Annahmen der WSTh	6
2.2 Der mathematische Aufbau der WSTh	11
2.3 Mängel der WSTh	13
3. <u>Diskussion notwendiger Änderungen der WSTh</u>	
3.1 Untersuchung der Möglichkeiten, die Mängel der WSTh zu vermeiden	15
3.2 Das Axiomensystem einer verbesserten WSTh	28
4. <u>Untersuchung des Axiomensystems von § 3.2</u>	
4.1 Untersuchung der Verträglichkeit der die Ensemblekonstruktion bestimmenden Axiome	32
4.2 Untersuchung der Verträglichkeit aller Axiome, die Konstruktion und zeitliche Entwicklung der Ensembles bestimmen	41
4.3 Untersuchung des vollen Axiomensystems	46
5. <u>Tragweite und Bedeutung der Ergebnisse aus Kapitel 3 und 4</u>	
5.1 Abhängigkeit der Ergebnisse der Kapitel 3 und 4 von einer sinnvollen Abschwächung des Axiomensystems	51
5.2 Diskussion der Möglichkeit konsistenter "Theorien mit verborgenen Parametern"	56
6. <u>Zusammenfassung</u>	60
7. <u>Anhang</u>	62
8. <u>Anmerkungen</u>	85
9. <u>Zusammenstellung wichtiger Bezeichnungen</u>	91
10. <u>Literaturverzeichnis</u>	92

1. Einleitung und Übersicht

Von Anfang an war die physikalische Interpretation der Quantentheorie Gegenstand lebhafter Auseinandersetzungen¹⁾. Diese Auseinandersetzungen erreichten ihren ersten Höhepunkt in den Diskussionen zwischen N. Bohr und A. Einstein in den Jahren 1926/27, kamen aber bald darauf zu einem gewissen Abschluß, da zu diesem Zeitpunkt weder eine Einigung noch eine zwingende Entscheidung zwischen den entgegengesetzten Standpunkten möglich schien.

Die Meinungsverschiedenheiten entzündeten sich vor allem an den neuartigen Eigenschaften des quantentheoretischen Zustandsbegriffes, wie er - unabhängig von seiner Interpretation - in der formalen Struktur der Quantenmechanik enthalten ist. Bekanntlich läßt sich der klassische Zustandsbegriff, der allen beobachtbaren Größen eines physikalischen Systems gleichzeitig einen "scharfen", d.h. innerhalb der experimentellen Fehlergrenzen reproduzierbaren Observablenwert zuordnet, für mikrophysikalische Systeme nicht verifizieren. Diese Erfahrungstatsache beruht darauf, daß sich die Möglichkeiten einer experimentellen Definition für gewisse Paare von Observablen $\mathcal{O}$, $\mathcal{L}$ gegenseitig ausschließen: Für jeden bezüglich $\mathcal{L}$ streufreien Zustand bedeutet eine genaue Messung von $\mathcal{O}$ eine prinzipiell unkontrollierbare und unberechenbare Störung, so daß in dem nach der $\mathcal{O}$ -Messung vorliegenden Zustand keine "Erinnerung" an den früheren $\mathcal{L}$ -Wert mehr vorhanden ist. Solche Observablenpaare nennt man unverträglich.

Die Quantenmechanik verwendet daher einen allgemeineren Zustandsbegriff, der nur experimentell nachprüfbare Aussagen über den Zustand eines physikalischen Systems macht. Dieser Zustandsbegriff geht von der Präparation physikalischer Systeme aus und ordnet jedem Individuum aus einem Kollektiv gleicher, identisch präparierter physikalischer Systeme den gleichen Zustand E zu. Ein System im Zustand E besitzt danach nicht für alle Observablen eindeutig bestimmte Werte, sondern es kann zu jeder Observablen im allgemeinen mehrere Observablenwerte mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeitsverteilung annehmen. Die Zustandsfunktion E gibt dabei zu jeder Observablen $\mathcal{O}$ gerade den Erwartungswert $E(\mathcal{O})$ an, der sich aus der Wahrscheinlichkeitsverteilung der $\mathcal{O}$ -Meßwerte ergibt. Dieser Zustandsbegriff ist experimentell verifizierbar, da man

in einem Kollektiv von gleichen, identisch präparierten physikalischen Systemen durch Bildung willkürlicher Unterkollektive auch die Mittelwerte von unverträglichen Observablen mit beliebiger Genauigkeit messen kann. Soweit die formalen Aussagen der Quantenmechanik über den quantentheoretischen Zustandsbegriff.

Diese Aussagen werden nun von Bohr und Einstein als den Repräsentanten der beiden entgegengesetzten Interpretationsstandpunkte völlig verschieden gedeutet.

Bohr^{2,3)} ist überzeugt davon, daß die Charakterisierung eines physikalischen Systems durch die Zustandsfunktion E maximal und vollständig ist. Die Tatsache, daß eine $\mathcal{O}$ -Messung an mehreren Systemen im gleichen Zustand E verschiedene Ergebnisse liefern kann, besagt nach Bohr weder, daß diese Systeme schon vor der Messung verschiedene $\mathcal{O}$ -Werte getragen haben, noch besagt sie, daß vor der Messung überhaupt ein Unterschied zwischen den Systemen vorhanden war. Sondern Bohr betont, daß in einem bezüglich $\mathcal{O}$ streuenden Zustand die Observable $\mathcal{O}$ als operativ definierte physikalische Größe nicht existiert. (Befindet sich z.B. ein Elektron an einem genau bestimmten Ort, so existiert kein Impuls dieses Elektrons, d.h. der Impuls ist in diesem Zustand als physikalische Größe nicht definiert, da keine Aussage über den Wert des Impulses verifizierbar ist.) Die in den Messungen an gleichen Zuständen auftretenden Streuungen entstehen nach Bohr erst während der Meßprozesse; sie sind ein direkter Ausdruck der in der Mikrophysik geltenden indeterministischen, statistischen Gesetze.

Einstein⁴⁾ bestreitet nicht, daß die "Kopenhagener Deutung" des quantenmechanischen Formalismus eine mögliche, in sich konsistente Interpretation der mikrophysikalischen Phänomene darstellt. Aber er hält die Quantenmechanik für eine noch nicht voll entwickelte Theorie, deren Zustandsbegriff uns nur eine unvollständige Beschreibung der Wirklichkeit liefert. Observable wie Ort und Impuls eines Elektrons stellen für Einstein objektive Größen der physikalischen Wirklichkeit dar, die stets existieren und einen scharfen Wert besitzen, auch wenn sie nach der Zustandsfunktion $E(\mathcal{O})$ nur unscharf definiert sind. Der statistische Charakter der quantentheoretischen Gesetze ist für Einstein ebenfalls ein Zeichen bzw. eine Folge der Unvollständigkeit der Theorie, denn er ist davon überzeugt, daß jeder Unterschied im Ergebnis der gleichen Messung an zwei verschiedenen Objekten begründet ist in einem - prinzipiell physikalisch definierbaren - Unterschied an den Objekten vor der Messung.

Wenn nun die Quantenmechanik - wie Einstein annimmt - mikroskopische Prozesse nur unvollständig beschreibt, so muß eine umfassendere, vollständige und deterministische Formulierung der Quantentheorie (die das unterschiedliche Verhalten gleicher physikalischer Systeme auf unterschiedliche Zustände der Systeme zurückführt) den Zustand eines physikalischen Systems durch Einführung zusätzlicher, experimentell nicht faßbarer Parameter genauer charakterisieren als die Quantenmechanik. Daher nennt man eine solche deterministische Formulierung der Quantentheorie auch eine "Theorie mit verborgenen Parametern" (im folgenden mit VPTh bezeichnet); und der Gegensatz zwischen Bohr und Einstein wird heute meist in die Frage gekleidet: "Gibt es eine Quantentheorie mit verborgenen Parametern?"

Ohne daß es zu einer endgültigen Entscheidung dieser Frage kam, setzte sich die - aus dem Bohrschen Standpunkt entwickelte - "Kopenhagener Deutung" nach 1928 immer mehr durch und war bald als "offizielle Deutung" der Quantentheorie anerkannt. Gefördert wurde diese Entwicklung vor allem durch v. Neumann, der - scheinbar - nachwies, daß sich gewisse statistische Eigenschaften des quantenmechanischen Zustandes in VPTh'en nicht darstellen lassen.

Aber 1951 wurde die Frage nach der Interpretation der Quantentheorie erneut aufgeworfen, als D. Bohm - im Gegensatz zu der rein naturphilosophischen Argumentation Einsteins - seine Ablehnung der "Kopenhagener Deutung" mit einer konkreten VPTh untermauerte^{5,6)}. Darüber hinaus veranlaßte die Diskussion um den Bohmschen Standpunkt eine Reihe von Physikern dazu, weitere VPTh'en zu entwickeln¹⁾; eine dieser VPTh'en stellt auch die Differentialraum-Quantentheorie⁷⁻¹⁰⁾ von N. Wiener und A. Siegel dar, die ich im folgenden mit WSTh bezeichne.

Die WSTh ist als deterministische Ensembletheorie in Analogie zur statistischen Thermodynamik konzipiert: Ein Kollektiv von physikalischen Systemen im gleichen quantenmechanischen Zustand E wird durch ein Ensemble von virtuellen Systemen dargestellt. Jedes virtuelle System befindet sich in einem "Mikrozustand", in dem jede Observable einen genau bestimmten Observablenwert besitzt; und die Zustände der virtuellen Systeme entwickeln sich deterministisch. Dabei ist das Ensemble so gewählt, daß die in dem Kollektiv auftretenden Streuungen von Observablenwerten gerade durch die unterschiedlichen Mikrozustände der virtuellen Systeme des Ensembles beschrieben werden. Die WSTh lehnt sich damit in ihren physika-

lischen Annahmen besonders eng an die Einsteinschen Vorstellungen an.

Bedauerlicherweise zeigt aber eine nähere Untersuchung¹¹⁾ der WSTh wesentliche Widersprüche zwischen den physikalischen Intentionen der Autoren und der mathematischen Formulierung der WSTh: Erstens stellt die WSTh keine Ensembletheorie dar; denn sie macht keinen Unterschied zwischen der Konzeption des (nur von der physikalischen Struktur des Systems abhängigen) Zustandsraumes und der Konzeption des (den kontingenten, veränderlichen "Makrozustand" beschreibenden) Ensembles. Zweitens können die Ensembleelemente der WSTh nicht als virtuelle Systeme interpretiert werden, da sie eine andere Observablenstruktur haben als das reale System. Und drittens führt die von Siegel und Wiener gegebene Beschreibung des Meßprozesses zu falschen Ergebnissen.

Aus dieser Lage ergab sich die Problemstellung der vorliegenden Dissertation: Lassen sich die erwähnten Mängel der WSTh durch eine Änderung des mathematischen Aufbaus der Theorie allein beheben oder sind diese Mängel bereits in den physikalischen Grundvoraussetzungen der WSTh impliziert? Mit anderen Worten, gibt es eine konsistente VPTh, die den Vorstellungen der WSTh entspricht?

Zur Einführung in dieses Problem geben wir im zweiten Kapitel zunächst eine knappe Darstellung der WSTh und ihrer oben erwähnten Mängel. Anschließend diskutieren wir, welche Forderungen man an die mathematische Struktur einer VPTh stellen muß, um die einzelnen Mängel der WSTh mit Sicherheit auszuschließen. Dabei erweist sich das Problem der "richtigen" Observablenstruktur als schwierig. Mit Hilfe eines Lemmas von Gleason¹²⁾ und Bell¹³⁾ läßt sich nämlich zeigen, daß die von der Quantenmechanik nahegelegten Zusammenhänge zwischen den Werten verträglicher Observablen nicht für alle Mikrozustände (Punkte) des Zustandsraumes gelten können. Das erfordert eine Änderung der Konzeption und der mathematischen Darstellung von Observablen und Quantenzuständen, die wir in § 3.1 mit Hilfe geeigneter physikalischer Vorstellungen entwickeln werden.

Eine Zusammenfassung der verschiedenen Forderungen ermöglicht dann in § 3.2 die Formulierung eines neuen Axiomensystems für eine "verbesserte" WSTh (im folgenden als VWSTh bezeichnet): Jedes mathematische Modell, das dieses Axiomensystem erfüllt, läßt sich als VWSTh interpretieren, d.h. als eine VPTh, die einerseits genau den physikalischen Vorstellungen von Wiener und Siegel entspricht, die aber andererseits von allen gravierenden Mängeln der WSTh frei ist.

Im vierten Kapitel untersuchen wir Verträglichkeit und Abhängigkeit der sechs Axiome dieses Axiomensystems. Dabei zeigt es sich, daß das vollständige Axiomensystem einen Widerspruch enthält; andererseits gelingt es durch Konstruktion eines geeigneten Modells, die Verträglichkeit der ersten fünf Axiome nachzuweisen. Das bedeutet für die physikalische Interpretation, daß keine von allen Mängeln freie VWSTh existiert. Es gibt zwar VPTh'en, die einer VWSTh sehr ähnlich sind, aber diese VPTh'en sind nicht in der Lage, eine korrekte Beschreibung des quantentheoretischen Meßprozesses zu geben.

In § 5.1 betrachten wir eine physikalisch sinnvolle Abschwächung unseres Axiomensystems und erörtern, inwieweit die wesentlichen Ergebnisse der Kapitel drei und vier davon in Frage gestellt werden.

Im letzten Paragraphen kommen wir auf das allgemeine Problem der Möglichkeit verborgener Parameter zurück und diskutieren kurz die einschlägige Literatur, soweit sie für unsere Arbeit von Bedeutung ist.

Eine abschließende Zusammenfassung geht nochmals auf die wesentlichen Ergebnisse der Arbeit ein.

Hinweis: Hochgestellte Zahlen (z.B. Bell¹³) weisen auf das Literaturverzeichnis am Ende der Arbeit hin. Zahlen in eckigen Klammern weisen auf eine Anmerkung am Ende der Arbeit hin. Eine Zusammenstellung der wichtigsten Abkürzungen und speziellen Bezeichnungen findet sich ebenfalls am Ende der Arbeit. Die im Text fehlenden Beweise einiger Sätze und Lemmata wurden in den Anhang verlegt.

2. Darstellung und Kritik der Differentialraum-Quantentheorie

2.1 Die physikalischen Vorstellungen der WSTh

Wie wir in der Einleitung betont haben und später noch näher erleutern werden, gibt es viele Möglichkeiten, die Quantentheorie zu formulieren. Eine dieser Formulierungen ist die WSTh, die wir in einer früheren Arbeit¹¹⁾ ausführlich behandelt haben und die wir im folgenden kurz skizzieren. Bevor wir auf die mathematischen Einzelheiten der WSTh eingehen, beschreiben wir zunächst die allgemeinen Annahmen und physikalischen Vorstellungen, die der WSTh zugrunde liegen. Das erleichtert nicht nur das Verständnis der knappen Darstellung des mathematischen Aufbaus der WSTh, sondern ist darüber hinaus notwendig, um später - wenn sich die ursprüngliche Formulierung der WSTh als unzulänglich erwiesen hat - ein Axiomensystem für eine "verbesserte WSTh" aufstellen zu können, das gerade die physikalisch wesentlichen Grundzüge der WSTh beibehält.

Jede Theorie, die die aus der Quantenmechanik bekannten Erwartungswerte der Observablen und ihre zeitliche Änderung durch Mittelwertbildung über ein Ensemble deterministisch sich entwickelnder "Mikrozustände" herleiten will, enthält zwei Teile mit eigenen Vorstellungen und Annahmen: Einen dynamischen Teil, der Konzeption und Gesetze der einzelnen Mikrozustände beschreibt und die notwendigen "verborgenen Parameter" einführt, und einen statistischen Teil, der erklärt, wie ein Ensemble aus einzelnen Elementen mit vorgegebener Dynamik das aus der Quantenmechanik bekannte (und experimentell bestätigte) statistische Verhalten zeigen kann. Beginnen wir mit den Vorstellungen, die dem dynamischen Teil der WSTh zugrunde liegen.

(1) Die WSTh übernimmt alle Aussagen der Quantenmechanik, soweit sie nicht unmittelbar die Interpretation des quantentheoretischen Zustandes betreffen. Insbesondere macht die WSTh folgende Annahmen:

- (a) Jedem physikalischen System ist ein komplexer, separabler Hilbertraum $\mathcal{H}$ zugeordnet, und es existiert eine bijektive Abbildung σ der Menge aller Observablen des Systems auf die Menge aller selbstadjungierten Operatoren aus $\mathcal{H}$; dabei ist σ mit allen borelschen Funktionen vertauschbar.
- (b) Eine Observable kann nur Werte aus dem Spektrum des zugeordneten Operators annehmen.

Die Übernahme dieser Voraussetzungen ist nicht verwunderlich, da Wiener und Siegel ja die quantitative Beschreibung des betreffenden Phänomenbereiches durch die Quantenmechanik als vollkommen exakt akzeptieren und lediglich eine neue, deterministische Interpretation dieser Resultate mit Hilfe eines neuen Zustandsbegriffes einführen wollen.

② Jedes physikalische System befindet sich in einem sog. "Mikrozustand", in dem alle Observablen einen wohldefinierten, durch die Vorgeschichte des Systems eindeutig bestimmten Wert haben. Darüber hinaus ist der Mikrozustand eines einzelnen Systems durch Angabe der Werte aller Observablen des Systems bereits eindeutig festgelegt. Es gibt also in der WSTh keine zusätzlichen, prinzipiell experimentell undefinierbaren "verborgenen Parameter", sondern alle den Mikrozustand definierenden Parameter sind operativ definiert. Verborgen sind sie nur insofern, als (in einem bestimmten, durch die experimentelle Präparation definierten "Makrozustand" des Systems) nie alle Observablen gleichzeitig gemessen werden können, sondern nur jeweils eine Untermenge von miteinander verträglichen Observablen. Daher läßt sich der Mikrozustand eines physikalischen Systems auch nicht experimentell bestimmen, wird aber von der WSTh als real vorausgesetzt.

③ Für jede Observable gibt es (im Prinzip) eine ideale Messung, die den Wert dieser Observablen und der mit ihr verträglichen Observablen nicht stört. Die ideale Messung registriert den bereits vor der Messung vorhandenen, "objektiven" Observablenwert.

④ Die zeitliche Entwicklung des Mikrozustandes ist deterministisch, d.h. der Mikrozustand zur Zeit $t = t_0$ bestimmt den Mikrozustand zu allen Zeiten eindeutig. Darüber hinaus wird in einem (im Sinne der Quantenmechanik) abgeschlossenen System die Änderung des Mikrozustandes allein durch die Struktur des Systems (Hamiltonoperator o.ä.) bestimmt.

⑤ Der statistische Teil der WSTh ist wesentlich durch die Annahme charakterisiert, daß der "statistische Überbau" der eben grob umrissenen Dynamik der Mikrozustände den gleichen Prinzipien genügen soll wie in der klassischen statistischen Mechanik und daß alle Unterschiede zwischen WSTh und statistischer Mechanik nur auf die unterschiedliche Dynamik der individuellen Systeme (Mikrozustände) zurückzuführen sind. Das bedeutet konkret: Jede experimentell realisierte Situation (= jeder experimentell präparierbare Makrozustand) enthält nur wenig Information

über den "eigentlichen" Mikrozustand des betreffenden Objektes. Daher repräsentiert man einen solchen Makrozustand (wie in der statistischen Mechanik) zweckmäßig durch ein Gibbs'sches Ensemble identischer "virtueller" Systeme. Ein solches Gibbs'sches Ensemble hat zwei wesentliche Eigenschaften: (1) Seine Elemente stimmen in allen Observablenwerten, die wir vom Originalsystem mit Sicherheit aussagen können, sämtlich mit diesem überein. (2) Bei den übrigen Observablen, von denen wir nur die Erwartungswerte kennen, verteilen sich alle mit unseren Kenntnissen vom Originalsystem verträglichen Observablenwerte so über die Elemente des Ensembles, daß die Mittelung (mit Hilfe einer geeignet zu definierenden Wahrscheinlichkeitsverteilung) über alle Ensembleelemente für alle Observablen gerade die experimentell beobachtbaren Erwartungswerte ergibt.

⑥ Der Verwendung der Gibbs'schen Ensembles liegt in der WSTh - wie in der statistischen Mechanik - die physikalische Annahme zugrunde, daß die Ensembles nicht nur formale Bedeutung haben, sondern auch stets ein statistisches Kollektiv realer, identisch präparierter Systeme repräsentieren. Folgerichtig besitzt daher jede physikalisch sinnvoll definierbare Teilmenge eines Gibbs'schen Ensembles eine nichtnegative Wahrscheinlichkeit, die als relative Häufigkeit der (in der Teilmenge liegenden) Mikrozustände in einem statistischen Kollektiv identisch präparierter Systeme interpretiert werden kann, unabhängig davon, ob sich die betreffende Teilmenge von Mikrozuständen auch experimentell isolieren läßt.

⑦ Was den Umfang und die Eigenschaften der experimentell präparierbaren Makrozustände angeht, so übernimmt die WSTh hier ebenfalls die als exakt angesehenen Aussagen der Quantenmechanik und setzt insbesondere voraus:

(a) Es existiert eine bijektive Abbildung $\mathcal{V}$ der Menge aller Makrozustände auf die Menge aller positiv semidefiniten, normierten selbstadjungierten Operatoren W aus $\mathcal{H}$, und der Erwartungswert der Observablen $\alpha = \sigma^{-1}(A)$ im Makrozustand $\mathcal{V}^{-1}(W)$ ist gegeben durch

$$E(\alpha) = \text{Sp}(AW)$$

(b) Ein physikalisches System besitzt zu jeder vorgegebenen Situation einen unitären "Entwicklungsoperator" $U(t, t_0)$, der die zeitliche Entwicklung des Zustandsoperators durch die Beziehung

$$W(t) = U(t, t_0) W(t_0) U^\dagger(t, t_0) \quad \text{eindeutig bestimmt.}$$

⑧ Betrachten wir die zeitliche Entwicklung eines Ensembles, das den Makrozustand eines physikalischen Systems repräsentiert. Durch die

Präparation des Makrozustandes ist die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Ensembleelemente zu Beginn der zeitlichen Entwicklung eindeutig festgelegt. Im Laufe der Entwicklung ändern sich im allgemeinen die Mikrozustände der einzelnen "virtuellen Systeme", d.h. die den virtuellen Systemen zugeordneten Punkte des Zustandsraumes durchlaufen eine bestimmte Bahn im Zustandsraum. Dabei darf sich aber die Wahrscheinlichkeitsverteilung der virtuellen Systeme im Ensemble nicht ändern. Denn diese Verteilung ist durch die Art der Präparation (d.h. durch eine von außen aufgeprägte Information) bestimmt und kann daher nur durch eine neue Information über den Makrozustand (d.h. durch eine Messung) geändert werden. In der WSTh muß es also ein Analogon zum Satz von Liouville geben.

⑨ Zum Abschluß der Darstellung der physikalischen Vorstellungen der WSTh wollen wir uns noch überlegen, daß die eben skizzierten Grundzüge einer ensembletheoretischen Formulierung der Quantentheorie die Beschreibung bzw. Erklärung des quantentheoretischen Meßprozesses bereits eindeutig festlegen.

Betrachten wir etwa den Vorgang einer exakten Messung der Observablen $\mathcal{O}$ an einem mikrophysikalischen Objekt. Gegeben seien das Objekt und ein zur exakten Messung der Observablen $\mathcal{O}$ geeignetes Instrument; beide mögen sich vor der Messung in wohldefinierten Makrozuständen befinden, so daß auch der Makrozustand des zusammengesetzten Systems "Objekt + Instrument" vor Beginn der Wechselwirkung gegeben ist. Dieses zusammengesetzte System beschreibt die WSTh nun nach ⑤ durch ein Ensemble zusammengesetzter virtueller Systeme, dessen statistische Eigenschaften dem vorgegebenen Makrozustand des realen Systems äquivalent sind. Während der Wechselwirkung zwischen Objekt und Instrument verändern sich die Mikrozustände aller Ensembleelemente gemäß ④ und ⑦.6, bis nach Beendigung der Wechselwirkung ein spezieller, für die exakte

$\mathcal{O}$ -Messung charakteristischer Makrozustand des Ensembles erreicht ist: (1) Der Wert der Observablen $\mathcal{O}$ ist während der Wechselwirkung bei allen virtuellen Systemen konstant geblieben. (2) Die Wechselwirkung zwischen Objekt und Instrument hat eine enge Korrelation (im Idealfall eine eindeutige Zuordnung) zwischen den Werten der Observablen $\mathcal{O}$ und den Werten der zugehörigen Instrument-Observablen $\mathcal{O}_I$ hergestellt, so daß eine (als problemlos angesehene) Ablesung des Wertes der makrophysikalischen Observablen $\mathcal{O}_I$ den Wert von $\mathcal{O}$ vor der Messung angibt.

Wir unterscheiden nun zwei Arten von Messungen:

(a) Bei der ersten Art interessieren wir uns für den Makrozustand des einzelnen realen Objektes nach der Messung. Dazu lesen wir nach Beendigung der Wechselwirkung zunächst den Wert von $\mathcal{O}$ am Instrument ab (z.B. $\mathcal{O} = a_k$) und betrachten dann das Teilensemble aller Ensembleelemente mit dem $\mathcal{O}$ -Wert a_k . Die statistischen Eigenschaften dieses Teilensembles bestimmen nun eindeutig den Makrozustand des Originalsystems nach der Messung, da der Prozeß "Wechselwirkung + Ablesung + Auswahl des Teilensembles mit $\mathcal{O} = a_k$ " die gemeinsame, wohldefinierte Präparation von Teilensemble und Originalsystem darstellt. Diese Art der präparativen Messung nennt man eine Präparation oder "Filter", da dieser Meßprozeß - mit der Auswahl als letztem Schritt - nur Systeme mit ganz bestimmten Makrozuständen "durchläßt".

(b) Bei der zweiten Art der Messung interessieren wir uns für den Erwartungswert $E(\mathcal{O})$ der Observablen $\mathcal{O}$. Mathematisch ergibt sich $E(\mathcal{O})$ einfach als Ensemblemittel des den Makrozustand repräsentierenden Ensembles. Kennt man aber den Makrozustand und damit die statistischen Eigenschaften des Ensembles nicht, so muß man das virtuelle Ensemble durch ein Kollektiv identisch präparierter Systeme "realisieren" und den Erwartungswert $E(\mathcal{O})$ experimentell bestimmen.

Damit die WSTh eine vollständige und konsistente Formulierung der Quantentheorie darstellt, müssen natürlich beide Arten der Messung zu dem von der Quantenmechanik geforderten Ergebnis führen, i.e. im ersten Fall zu dem Makrozustand $W_2 = P_{a_k} W_1 P_{a_k} / \text{Sp}(W_1 P_{a_k})$ und im zweiten Fall zu dem Erwartungswert

$$E(\mathcal{O}) = \text{Sp}(W A) .$$

Diese Überlegungen zeigen, daß sich die Erklärung des quantentheoretischen Meßprozesses bereits aus den Annahmen (1) bis (8) ergibt, ohne daß dabei eine zusätzliche Voraussetzung notwendig wäre, wie sie der "Schnitt" (i.e. die Vernachlässigung der Interferenzglieder im Zustandsoperator des zusammengesetzten Systems nach Ende der Wechselwirkung) in der quantenmechanischen Beschreibung des Meßprozesses darstellt. Das ist auch nicht verwunderlich; denn die Operation des Schnittes setzt ja den quantenmechanischen Zustandsbegriff voraus, bei dem auch in einem maximal bestimmten Zustand stets mehrere Zustände "koexistieren", d.h. kohärent überlagert sind. Der Zustandsbegriff der WSTh ist aber nach (2)

so konzipiert, daß eine Koexistenz verschiedener Zustände unsinnig ist. Daher ist auch eine dem Schnitt analoge Operation in der WSTh unmöglich und überflüssig.

2.2 Der mathematische Aufbau der WSTh

Nachdem wir die allgemeine Struktur und die grundlegenden physikalischen Annahmen der WSTh geschildert haben, wollen wir in aller Kürze den mathematischen Aufbau der WSTh skizzieren.

Ähnlich wie in der statistischen Mechanik werden die Mikrozustände in der WSTh durch Punkte eines Zustandsraumes dargestellt, und die Gibbs'schen Ensembles sind "gewichtete" (d.h. mit einer Wahrscheinlichkeitsverteilung versehene) Punktmengen im Zustandsraum. Zur Konstruktion des Zustandsraumes verwendet die WSTh einen Differentialraum $\mathcal{D}$ von gleicher Dimension wie der Hilbertraum $\mathcal{H}$ des betrachteten physikalischen Systems, so daß man $\mathcal{H}$ als Unterraum von $\mathcal{D}$ auffassen kann [2.1]. Jedes Element von $\mathcal{D}$ soll ein virtuelles System in einem wohldefinierten Mikrozustand repräsentieren. Um dies zu erreichen, definiert die WSTh auf dem Differentialraum zu jeder Observablen $\mathcal{O}$ des physikalischen Systems im Makrozustand W eine "Observablenwertfunktion" $A_W(x)$, deren Funktionswerte gerade aus den Eigenwerten des zu $\mathcal{O}$ gehörenden Operators $A = \mathcal{G}(\mathcal{O})$ bestehen:

Definition Sei $W = \sum_{i \in J \subseteq \mathbb{N}} \lambda_i Q_i$ der Zustandsoperator zum Makrozustand eines physikalischen Systems und sei $A = \sum_{\nu \in K \subseteq \mathbb{N}} a_\nu P_\nu$ der Operator zur Observablen $\mathcal{O}$. Sei y ein - mit Hilfe einer festen Vorschrift ausgewähltes - Element aus $\bigcup_{i \in J} Q_i \mathcal{H}$ mit $\|y\| = 1$. Mit Hilfe von y ergeben sich die Indexmengen

$$L(A, W) = \{ \lambda \in K \subseteq \mathbb{N} \mid \text{Sp}(W P_{a_\lambda}) > 0 \}$$

$$S(x, A, W) = \left\{ s \in L(A, W) \mid \frac{| \langle y | P_{a_s} | x \rangle |^2}{\langle y | P_{a_s} | y \rangle \text{Sp}(W P_{a_s})} = \inf_{\lambda \in L} \frac{| \langle y | P_{a_\lambda} | x \rangle |^2}{\langle y | P_{a_\lambda} | y \rangle \text{Sp}(W P_{a_\lambda})} \right\}$$

Dann definieren wir die Observablenwertfunktion ${}^{\circ}A_w(x)$ durch die Vorschrift

$${}^{\circ}A_w(x) = a_{G(x,A,w)} \quad \text{mit} \quad G(x,A,w) = \min_{s \in S} \{s\} \quad (2.1)$$

Offensichtlich ist die Funktion ${}^{\circ}A_w(x)$ für alle Zustandsoperatoren W und alle diskreten Operatoren A im ganzen Differentialraum eindeutig definiert und ist dort endlich und Wiener-summabel [2.2].

Die Gesamtheit aller Funktionen ${}^{\circ}A_w$ definiert nun zu jedem Element $x \in \mathcal{D}$ eine neue Funktion $X(A,w)$ durch die Vorschrift

$$X(A,w) = a_k \iff {}^{\circ}A_w(x) = a_k \quad (2.2)$$

Mit Hilfe dieser Funktionen können wir nun unmittelbar den Zustandsraum der WSTh einführen:

Erstes dynamisches Postulat "Zu vorgegebenem Makrozustand W definieren die Funktionen $X(A,w)$ zu jedem Punkt aus $\mathcal{D}$ eindeutig einen bestimmten Mikrozustand und machen $\mathcal{D}$ damit zu einem Zustandsraum für das betrachtete physikalische System."

Zu einem vollständigen Gibbs'schen Ensemble gehört noch eine geeignete Gewichtsverteilung der Mikrozustände im Zustandsraum. Hierzu verwendet die WSTh einfach das mit der Definition von $\mathcal{D}$ bereits vorgegebene Wienermaß μ . Unter Berücksichtigung der bereits erwähnten μ -Summierbarkeit der Funktionen ${}^{\circ}A_w$ formuliert die WSTh dann ihr

Statistisches Postulat "Jeder Observablen $\mathcal{O}$ eines physikalischen Systems im Makrozustand W ist durch Gl (2.1) eine eindeutig bestimmte Zufallsgröße ${}^{\circ}A_w$ auf dem Differentialraum $\mathcal{D}$ zugeordnet; und bei einer Serie von $\mathcal{O}$ -Messungen im Zustand W treten gerade die Funktionswerte der Zufallsgröße ${}^{\circ}A_w$ mit der zugehörigen Wahrscheinlichkeitsverteilung als Observablenwerte auf."

Damit ist das "Differentialraumensemble" für einen festen Zeitpunkt konstruiert. Es fehlt noch die zeitliche, deterministische Entwicklung der Ensembleelemente (und die daraus resultierende zeitliche Änderung der Ensemblemittelwerte). Die WSTh postuliert die zeitliche Entwicklung der virtuellen Systeme im Differentialraum in enger Anlehnung an die Quantenmechanik:

Zweites dynamisches Postulat "Ist $\mathcal{U}(t,t_0)$ der Schrödingersche Entwicklungsoperator des betrachteten physikalischen Systems, so wird die zeitliche Entwicklung der virtuellen Systeme des Differentialraumensembles

durch die Bewegungsgleichung $\chi(t) = \hat{U}(t, t_0) \chi(t_0)$ beschrieben; dabei bedeutet $\hat{U}$ die durch U in $\mathcal{D}$ induzierte "verallgemeinerte unitäre Transformation".

Wie Wiener und Siegel gezeigt haben, ergeben die beiden letzten Postulate für alle Observablen in allen Makrozuständen gerade die "richtige" Wahrscheinlichkeitsverteilung der Meßwerte (und zwar ergibt sich für die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Observablenwerte die zeitabhängige Verteilungsfunktion $\mathbb{P}_{\alpha, \omega_0}(a, t) = \sum_{\alpha_n < a} S_P(\omega_0, U_t^+ P_{\alpha_n} U_t)$). Mit den neun allgemeinen Annahmen aus § 2.1 und den obigen Postulaten haben wir die wesentlichen Punkte der WSTh skizziert; für ergänzende Details verweise ich auf die Literatur⁷⁻¹¹⁾.

2.3 Mängel der WSTh

An diese knappe Darstellung der WSTh wollen wir nun eine kurze, kritische Diskussion anschließen. Eine kritische Diskussion der WSTh - wie überhaupt jeder Neuformulierung der Quantentheorie - sollte u.a. folgende Fragen behandeln:

- (1) Gibt es Widersprüche zwischen dem mathematischen Formalismus der WSTh und den physikalischen Vorstellungen, die der WSTh zugrunde liegen?
- (2) Kommt die WSTh zu Aussagen, die den experimentell bestätigten Aussagen der Quantenmechanik widersprechen?
- (3) Hat die WSTh in bezug auf experimentell prüfbare Aussagen einen anderen Geltungsbereich als die Quantenmechanik?
- (4) Ermöglicht die WSTh neue Lösungsmethoden für konkrete physikalische Probleme, die denen der Quantenmechanik wenigstens in manchen Fällen überlegen sind?

Auf Grund der besonderen Konstruktion der WSTh lassen sich die beiden letzten Fragen unmittelbar mit "nein" beantworten. Die Fragen (1) und (2) sind nicht so trivial und müssen genauer untersucht werden. In einer früheren Arbeit¹¹⁾ sind wir zu folgenden Ergebnissen gekommen:

- Ⓐ Die WSTh ist schon ihrer formalen Struktur nach keine Ensembletheorie im Sinne der statistischen Mechanik, da sie keinen Unterschied macht zwischen Ensemble und Zustandsraum. Wie man aus dem statistischen und dem ersten dynamischen Postulat ersieht, konstruiert die WSTh zu jedem Makrozustand einen eigenen Zustandsraum, der auf Grund des von vornherein

festgelegten und vom Zustandsoperator unabhängigen Wienermaßes stets mit dem Ensemble zusammenfällt. Damit gibt die WSTh aber eines der fruchtbarsten und grundlegendsten Prinzipien jeder Ensembletheorie auf, nämlich die Unterscheidung zwischen der Struktur eines physikalischen Systems - die die Wahl des Zustandsraumes bestimmt - und seinem zufälligen Zustand - der durch ein spezielles Ensemble im Zustandsraum repräsentiert wird. In diesem Punkt entfernt sich die WSTh also viel weiter von der klassischen Physik als die Quantenmechanik, die die Unterscheidung zwischen System und Zustand auch in ihrem Formalismus klar zum Ausdruck bringt [2.3] .

Dieser Mangel der WSTh erscheint besonders gravierend, wenn wir die zeitliche Entwicklung eines abgeschlossenen Systems betrachten. Wie sich aus Def (2.4) ergibt, hängen die (den Zustandsraum definierenden) Observablenwertfunktionen $\overset{\circ}{A}_W$ in zweifacher Weise von der Zeit ab: Erstens über die "Zustandsströmung" $\hat{u}$ der virtuellen Systeme in $\mathcal{D}$, und zweitens über die kontinuierliche Änderung des Zustandsoperators $W(t)$. Das bedeutet, daß zu jedem Zeitpunkt ein neuer Zustandsraum konstruiert wird. Die WSTh muß also nicht nur zu verschiedenen, vorgegebenen Makrozuständen verschiedene Zustandsräume konstruieren, sie kann darüber hinaus nicht einmal die zeitliche Entwicklung eines abgeschlossenen Systems als reine Zustandsströmung im gleichen Zustandsraum darstellen.

(b) In engem Zusammenhang mit Punkt (a) steht auch folgende Eigentümlichkeit der WSTh: Im Gegensatz zur Quantenmechanik und zur klassischen statistischen Mechanik existiert in der WSTh eine deutliche Unsymmetrie zwischen dem Schrödinger-Bild und dem Heisenberg-Bild der zeitlichen Änderung der Erwartungswerte. Das liegt daran, daß die Auswahl des Bildes $A_{G(x,A,W)}$ bei der Abbildung $\mathcal{D} \longmapsto \mathcal{S}^T(A)$ wesentlich auf dem Vergleich der Größen $|\langle y(w) | \hat{P}_s | x \rangle|$ beruht. Im Schrödinger-Bild dürfte der Entwicklungsoperator nur auf x wirken: $x(t) = \hat{u}_t x$, dagegen dürfte sich im Heisenberg-Bild nur $\hat{P}_s$ verändern: $\hat{P}_s(t) = u_t^+ \hat{P}_s u_t$. In Gl (2.1) gilt aber

$$\langle y | \hat{P}_s(t) | x \rangle = \langle y | u_t^+ \hat{P}_s u_t | x \rangle = \langle y(t) | \hat{P}_s | \hat{u}x \rangle \neq \langle y | \hat{P}_s | x(t) \rangle$$

(c) Neben diesen Mängeln des "statistischen Überbaus" gibt es aber auch ein starkes Argument gegen den Anspruch, die Punkte des Zustandsraumes der WSTh als virtuelle "Kopien" des Originalsystems aufzufassen. Die virtuellen Systeme der WSTh haben nämlich nicht die gleichen physikalischen

Eigenschaften wie das Originalsystem, da die funktionale Abhängigkeit zwischen den Observablen in beiden Fällen verschieden ist: Obwohl die Beziehung ${}^{\circ}f(A)_w = f({}^{\circ}A_w)$ (2.3) in der Quantenmechanik (und damit in allen experimentell zugänglichen Komponenten des Mikrozustandes des Originalsystems) erfüllt ist und auch durch die Annahmen (1.a), (2) und (3) gefordert wird, gilt sie für die Mikrozustände der WSTh nicht allgemein.

(d) Soweit die Annahmen (1) bis (8) überhaupt zu experimentell prüfbaren Aussagen führen, stimmen diese mit der Quantenmechanik und damit mit der Erfahrung überein. Dagegen führt eine folgerichtige Beschreibung des exakten Meßprozesses im Rahmen der WSTh, wie sie in (9) erläutert wurde, zu einem von der Quantenmechanik und der experimentellen Erfahrung abweichenden Ergebnis.

Unsere kritische Diskussion der WSTh hat so schwerwiegende Einwände erbracht, daß die WSTh in ihrer ursprünglichen Form als ensembletheoretische Formulierung der Quantentheorie (bzw. als VPTh) u.E. nicht haltbar ist. Hier stellt sich nun das Problem, ob die WSTh unter Bewahrung ihrer allgemeinen, physikalisch wesentlichen Annahmen so "verbessert" werden kann, daß die oben aufgezeigten Mängel wegfallen. Dieses Problem bildet das Thema der vorliegenden Arbeit.

3. Diskussion notwendiger Änderungen an der WSTh

3.1 Untersuchung der Möglichkeiten, die Mängel der WSTh zu vermeiden

Die Überlegungen des zweiten Kapitels führten zu der Frage, ob die Mängel der WSTh bereits durch die allgemeinen physikalischen Annahmen impliziert sind, oder ob sich eine "verbesserte WSTh" (mit anderem mathematischen Aufbau) konstruieren läßt, die die physikalischen Annahmen der WSTh beibehält, aber ihre Mängel vermeidet.

Um diese Frage zu entscheiden, könnte man versuchen, den mathematischen Formalismus der WSTh schrittweise soweit abzuändern, bis eine VWSTh gefunden ist. Der Erfolg dieses Verfahrens ist aber sehr zweifelhaft und wir halten es für sinnvoller, zunächst ein Axiomensystem der VWSTh aufzustellen, das die physikalischen Vorstellungen der WSTh

berücksichtigt und gleichzeitig die oben erwähnten Mängel der WSTh mit Sicherheit ausschließt. Dazu untersuchen wir zunächst die schwachen Punkte der WSTh darauf hin, wie sie sich konkret vermeiden lassen.

Beginnen wir mit der Diskrepanz zwischen den formalen Eigenschaften der Differentialraumensembles der WSTh und ihrer physikalischen Deutung. Um den in Kapitel zwei angeführten Widerspruch (a) zu vermeiden, müssen wir an die mathematische Konstruktion von Zustandsraum und Gibbs'schen Ensembles in einer VWSTh ganz konkrete Forderungen stellen, die aus der klassischen statistischen Mechanik bekannt sind:

(1) Um eine eindeutige Zuordnung zwischen dem betrachteten physikalischen System und dem - zu seiner Beschreibung verwendeten - Zustandsraum zu erhalten, dürfen die Observablenwertfunktionen $^{\circ}A(x)$ nicht von dem "zufälligen" Makrozustand des Systems abhängen. Damit erreichen wir, daß die Gesamtheit der Funktionen $^{\circ}A$ den zugrunde gelegten Raum zum Zustandsraum macht, in dem dann verschiedene Makrozustände durch verschiedene Ensembles repräsentiert werden können.

(2) Um ein physikalisches System in einem bestimmten (durch die Präparation definierten) Makrozustand durch ein Ensemble zu repräsentieren, muß die Wahrscheinlichkeitsverteilung der virtuellen Systeme des Ensembles von dem Makrozustand abhängen; andererseits darf sie auch nur vom Makrozustand abhängen, da dieser die Wahrscheinlichkeitsverteilung sämtlicher Meßwerte in einem realen Kollektiv identisch präparierter Systeme bereits eindeutig bestimmt. Für den mathematischen Formalismus der VWSTh bedeutet das die Forderung: "Jedem - durch den Zustandsoperator W charakterisierten - Makrozustand wird eindeutig ein normiertes Maß μ_w auf einer geeigneten $\mathfrak{G}$ -Algebra über dem Zustandsraum Ω zugeordnet, das die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Mikrozustände in dem entsprechenden Ensemble bestimmt. Für die Erwartungswerte der Observablen im Makrozustand $\mathcal{V}^{-1}(w)$ gilt dann

$$E_w(\alpha) = \int_{\Omega} {}^{\circ}A(x) d\mu_w \quad (3.1)$$

Berücksichtigen wir zusätzlich, daß wir ja eine ensembletheoretische Formulierung der Quantentheorie anstreben, so erhalten wir die Forderung

$$E_w(\alpha) = \int_{\Omega} {}^{\circ}A(x) d\mu_w = \text{Sp}(AW) \quad (3.2)$$

(3) In einer deterministischen Ensembletheorie darf die zeitliche Änderung des Ensembles (im Schrödinger-Bild!) nur von der deterministischen Änderung des Mikrozustandes der Ensembleelemente herrühren, wobei sich nach Annahme (8) die relativen Gewichte der Ensembleelemente nicht ver-

ändern. Für den mathematischen Formalismus bedeutet das die Forderung

$$E_w(\alpha, t) = \int_{\Omega} A(x) d\mu_w(T_t^{-1}x) \quad (3.3)$$

wobei T_t eine

Strömung im Zustandsraum Ω darstellt. Andererseits kennen wir aber die (durch die Zustandsströmung induzierte) zeitliche Änderung des Makrozustandes und der Erwartungswerte $E_w(\alpha, t)$ bereits aus der Quantentheorie, und für eine ensembletheoretische Formulierung der Quantentheorie folgt daher aus (3.2)

$$E_w(\alpha, t) = \int_{\Omega} A(x) d\mu_{w(t)} = E_{w(t)}(\alpha) = E_{u_t w u_t^+}(\alpha) \quad (3.4)$$

wobei die zeitliche Änderung des Zustandsoperators $w(t) = u_t w u_t^+$ durch Annahme (7.6) gegeben ist. Aus (3.3) und (3.4) ergibt sich unmittelbar die Forderung

$$d\mu_w(T_t^{-1}x) = d\mu_{u_t w u_t^+}(x) \quad (3.5)$$

durch die die Strömung T_t durch den quantenmechanischen Entwicklungsoperator u_t bestimmt wird.

Als zweiten Punkt behandeln wir die (in der WSTh verletzte aber in der VWSTh angestrebte) Symmetrie zwischen Schrödinger-Bild und Heisenberg-Bild für die zeitliche Entwicklung der Ensembles. Im Schrödinger-Bild, das wir eben verwendet haben und das im Rahmen einer Ensembletheorie auch näher liegt, ändern sich nur die Mikrozustände der virtuellen Systeme, während die Observablenwertfunktionen unverändert bleiben. Im Heisenberg-Bild dagegen bleiben die Mikrozustände aller Ensembleelemente unverändert, und die zeitliche Änderung des Erwartungswertes wird durch eine stetige Änderung der betrachteten Observablen (z.B. räumliche Verschiebung eines Geigerzählers) erklärt bzw. hervorgerufen. Im Heisenberg-Bild haben wir also zeitabhängige Observablenwertfunktionen A_t und konstante Maße μ_w . Um nun die Symmetrie zwischen Heisenberg-Bild und Schrödinger-Bild herzustellen, gehen wir von der mathematischen Identität

$$\int_{\Omega} A(x) d\mu_w(T^{-1}x) = \int_{\Omega} A(Tx) d\mu_w(x) \quad (3.6)$$

aus. Im Heisenberg-Bild einer ensembletheoretischen Formulierung der Quantentheorie gilt nach (3.2)

$$Sp(w A_t) = Sp(w u_t^+ A u_t) = \int_{\Omega} A_t(x) d\mu_w(x) \quad (3.7)$$

Andererseits gilt nach (3.3) und (3.6)

$$Sp(u_t w u_t^+ A) = \int_{\Omega} A(Tx) d\mu_w(x) \quad (3.8)$$

Aus den beiden letzten Gleichungen ergibt sich dann die Forderung

$${}^{\circ}A_t(x) := {}^{\circ}(u_t^+ A u_t)(x) = {}^{\circ}A(Tx) \quad (3.9)$$

Man überzeugt sich leicht davon, daß die unter (1) und (2) erläuterten Mängel der WSTh in einer Ensembletheorie mit den Eigenschaften (3.2), (3.5) und (3.9) nicht auftreten.

Als dritten der in § 2.3 erörterten Widersprüche betrachten wir die Diskrepanz zwischen den formalen Eigenschaften der Mikrozustände der WSTh und den Eigenschaften, die man von den Zuständen realer Systeme erwartet. Auf den ersten Blick scheint dieser Punkt keine weiteren Überlegungen zu erfordern, da die kritische Diskussion von § 2.3 mit

$${}^{\circ}f(A) = f({}^{\circ}A) \quad (3.10) \quad \text{ja bereits eine Beziehung angibt,}$$

die besagte Diskrepanz mit Sicherheit ausschließt. Diese Beziehung ist auch präzise genug, um sie unmittelbar in das Axiomensystem einer VWSTh aufnehmen zu können. Es zeigt sich aber, daß die Forderung ${}^{\circ}f(A) = f({}^{\circ}A)$ zu anderen Annahmen der VWSTh in Widerspruch steht. Um das einzusehen, betrachten wir zunächst einige Folgerungen, die sich aus (3.10) für die Form der Funktionen ${}^{\circ}A$ ergeben.

L e m m a (3.1) Voraussetzung: (a) Es existiert eine bijektive Abbildung σ der Menge aller Observablen eines physikalischen Systems auf die Menge aller selbstadjungierten Operatoren im Hilbertraum dieses Systems. (b) Zu jeder Observablen α existiert eine Abbildung $\Omega \xrightarrow{{}^{\circ}A} \text{SpT}(A)$ des Raumes Ω in das Spektrum des Operators $A = \sigma(\alpha)$.

Behauptung: Unter diesen Voraussetzungen sind die beiden Aussagen

$${}^{\circ}f(A) = f({}^{\circ}A)$$

und

$$A = \sum_{\nu} a_{\nu} P_{a_{\nu}} \Rightarrow {}^{\circ}A = \sum_{\nu} a_{\nu} {}^{\circ}P_{a_{\nu}} \quad \text{bzw.} \quad A = \int \lambda dE_{\lambda} \Rightarrow {}^{\circ}A = \int \lambda d{}^{\circ}E_{\lambda}$$

über den Zusammenhang zwischen den Funktionen ${}^{\circ}A$ äquivalent; und aus jeder von ihnen ergeben sich die Beziehungen

$$(1) \quad {}^{\circ}P_{a_{\nu}} = \mathcal{U}[\alpha = a_{\nu}] =: \mathcal{U}[\sigma(\alpha)_{P_{a_{\nu}}}] \quad \text{bzw.} \quad {}^{\circ}E_{\lambda} = \mathcal{U}[\alpha \leq \lambda]$$

$$(2) \quad AB = 0 \Rightarrow {}^{\circ}A \cdot {}^{\circ}B = 0 \wedge {}^{\circ}A + {}^{\circ}B = {}^{\circ}(A+B); \quad R \leq S \Rightarrow {}^{\circ}R \leq {}^{\circ}S$$

$$(3) \quad 1 = \sum_{\mu} Q_{\mu} \Rightarrow 1 = \sum_{\mu} {}^{\circ}Q_{\mu} \quad \text{bzw.} \quad \lim_{\lambda \rightarrow \infty} E_{\lambda} = 1 \Rightarrow \int 1 d{}^{\circ}E_{\lambda} = 1$$

Entscheidend für die weiteren Überlegungen ist ein wichtiges Lemma von Gleason¹²⁾ und Bell¹³⁾, das wir in einer für unsere Zwecke leicht verallgemeinerten Form beweisen:

L e m m a (3.2) Neben den Voraussetzungen (a) und (b) von Lemma (3.1) machen wir in Lemma (3.2) noch drei weitere Voraussetzungen:

(c) Der Hilbertraum $\mathcal{H}$ unseres physikalischen Systems hat mindestens drei Dimensionen.

(d) Jedem Makrozustand $\mathcal{G}^{-1}(w)$ ist eindeutig ein normiertes Maß μ_w auf einer geeigneten $\mathcal{G}$ -Algebra über dem Zustandsraum Ω zugeordnet.

(e) Für die Propositionen unseres Systems gelten die Beziehungen

$$(e.1) \quad Q \cdot P = 0 \quad \text{und} \quad {}^o P(x) = 1 \quad \Rightarrow \quad {}^o Q(x) = 0$$

und (e.2) $P_1 \cdot P_2 = 0$, $Q < P_1 + P_2$ und ${}^o P_1(x) = {}^o P_2(x) = 0 \Rightarrow {}^o Q(x) = 0$ fast überall für alle in der VWSTh definierten Maße μ_w (abgekürzt $\overset{\infty}{V} \times$).

Behauptung: Existiert dann ein Zustandsoperator V mit der Eigenschaft

$$\mu_v \left\{ x \in \Omega \mid {}^o P_{\varphi_0}(x) = 0, {}^o P_{\varphi_1}(x) = 1 \right\} > 0 \quad (3.4)$$

für zwei Einheitselemente φ_0 und φ_1 aus $\mathcal{H}$, so gilt $\|\varphi_0 - \varphi_1\| > \frac{1}{2}$.

Aus diesen beiden Lemmata ergibt sich nun

S a t z (1) Hat der Hilbertraum unseres Systems mindestens drei Dimensionen, so steht die Forderung ${}^o f(A) = f({}^o A)$ im Widerspruch zu den Annahmen (1) und (7a) aus § 2.1 und der Forderung (3.4) aus § 3.1.

In dieser Situation erhebt sich natürlich die Frage, ob die mit einer ensembletheoretischen Formulierung der Quantentheorie verbundenen physikalischen Vorstellungen uns zwingen, die Forderung () in vollem Umfang aufrechtzuerhalten oder ob sich diese Forderung soweit abschwächen läßt, daß der obige Widerspruch vermieden wird. Sollten wir zu dem Ergebnis kommen, daß sich die Forderung (3.4) im Rahmen einer VWSTh nicht in physikalisch sinnvoller Weise abschwächen läßt, so wäre das Ziel der Arbeit mit Satz (1) bereits erreicht: Die Frage nach der Möglichkeit einer konsistenten VWSTh wäre in negativem Sinne entschieden.

Um herauszufinden, ob und wie weit sich die Forderung (3.4) abschwächen läßt, versuchen wir, alle "Vorurteile" über den Zusammenhang von Observablenwerten in Mikrozuständen auszuschalten und fragen uns:

(1) Welche experimentelle Begründung gibt es eigentlich für die Beziehung (3.4)? (2) Folgt die Beziehung (3.4) nach Voraussetzung der allge-

meinen Annahmen (1), (2), (3) und (5) aus § 2.1 notwendig aus der experimentellen Erfahrung? (3) Was bedeutet die Beziehung (3.40) physikalisch, und was bedeutet es, sie aufzugeben oder abzuschwächen?

Die Antwort auf die erste Frage ergibt sich unmittelbar aus den Annahmen (2) und (5) der WSTh. Danach ist ein Mikrozustand gerade durch Angabe aller Observablenwerte eindeutig bestimmt, und in jedem Makrozustand läßt sich eine bestimmte Teilmenge dieser Observablenwerte experimentell ermitteln (und zwar gerade die Observablenwerte, die in diesem Makrozustand mit Sicherheit festliegen, d.h. die allen Mikrozuständen des Makrozustandes gemeinsam sind). In verschiedenen Makrozuständen können also verschiedene "Ausschnitte" der Observablenstruktur der Mikrozustände experimentell studiert werden. Zeigen sich dabei nun gewisse Gesetzmäßigkeiten, die ausnahmslos in allen experimentell zugänglichen "Ausschnitten" der Observablenstruktur aller (in den jeweiligen Experimenten auftretenden) Mikrozustände gelten, so liegt die Annahme nahe, daß diese Gesetzmäßigkeiten für die ganze Observablenstruktur aller Mikrozustände überhaupt gelten. Unter dieser Annahme ergibt sich die Beziehung (3.40) tatsächlich aus der Erfahrung, wie folgendes Lemma zeigt.

L e m m a (3.3) Wenn in einem Makrozustand W die Observablen einer bestimmten Observablenmenge $\mathcal{O}$ ihre Werte mit Sicherheit annehmen (d.h. wenn in dem durch W definierten Ensemble alle Mikrozustände in den Werten der Observablen aus $\mathcal{O}$ mit dem Makrozustand übereinstimmen), dann gilt für die Erwartungswerte der Observablen aus $\mathcal{O}$ die Beziehung

$$E_w[f(\alpha)] = f[E_w(\alpha)]$$

Diese Antwort auf die erste Frage gibt uns auch schon den entscheidenden Hinweis für die Beantwortung der zweiten Frage. Wir brauchen nämlich die eben erwähnte Annahme von der allgemeinen Gültigkeit der experimentell gesicherten "Ausschnitts-Gesetze" nicht zu machen, sondern wir können grundsätzlich annehmen, daß alle Ausschnittsgesetze nur statistische Eigenschaften der Makrozustände darstellen und nicht für alle Mikrozustände gelten. Bei Gesetzmäßigkeiten zwischen echten Ensemblemittelwerten ist diese Annahme natürlich; bei Gesetzmäßigkeiten zwischen (allen Mikrozuständen eines Ensembles gemeinsamen) Observablenwerten bedeutet diese Annahme, daß die Gesetzmäßigkeiten nicht allen Mikrozuständen überhaupt zukommen, sondern daß das Ensemble - auf Grund der für den Makrozustand spezifischen experimentellen Präparation - nur solche Mikrozustände enthält, bei denen gerade dieser Zusammenhang

zwischen den Observablenwerten besteht. Diese Überlegungen zeigen, daß die Beziehung (3.40) keineswegs zwangsläufig aus der Erfahrung folgt.

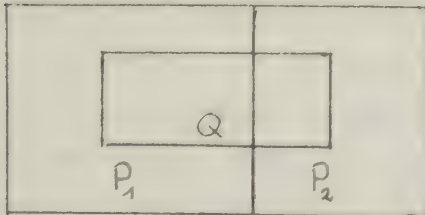
Man kann im Prinzip sogar annehmen, daß der Zustandsraum eines Systems alle formal möglichen Kombinationen von Observablenwerten enthält, d.h. daß es überhaupt keine einschränkenden Gesetze für die Observablenstruktur von Mikrozuständen gibt. In diesem Fall ist es dann allein Aufgabe der die Ensembles charakterisierenden Maße μ_w , in einem vorgegebenen Makrozustand gerade diejenigen "Gebiete" des Zustandsraumes zu "verbie-ten" (d.h. mit dem Maß 0 zu belegen), deren Mikrozustände der experimen-tellen Erfahrung im betrachteten Makrozustand widersprechen. Diese sehr allgemeine Konzeption des Zustandsraumes verträgt sich aller-dings nur schlecht mit der in Annahme (C) formulierten Idee einer Ensembletheorie, daß alle Mikrozustände des Zustandsraumes reale Bedeutung haben.

Es ist daher physikalisch befriedigender, in der Konstruktion des Zustandsraumes (durch Einführung einer - gegenüber (3.40) abgeschwächten - Forderung an die Observablenstruktur der Mikrozustände) nur solche Mikro-zustände zuzulassen, die mindestens einem Ensemble auch wirklich angehö-ren (und damit der physikalischen Erfahrung dieses Makrozustandes nicht widersprechen). Diese Überlegungen wollen wir bei der Suche nach einer Abschwächung der Forderung (3.40) berücksichtigen.

Zur Beantwortung der dritten Frage müssen wir uns folgendes klarmachen: Die Forderung ${}^oA(x) = \sum_v a_v {}^oP_{a_v}(x)$ bedeutet formal, daß der Wert ${}^oP_{a_v}(x)$ nicht davon abhängt, in welchem Operator der Projektionsoperator P als orthogonaler Summand auftritt; und das bedeutet physikalisch, daß die Messung der Präposition $\mathcal{P} = \mathcal{G}^{-1}(P)$ im Mikrozustand x stets den glei-chen Wert ${}^oP(x)$ ergibt, unabhängig davon, welche anderen - im Sinne der Quantenmechanik verträglichen - Observablen gemeinsam mit $\mathcal{P}$ gemessen werden. Um die Forderung (3.40) aufheben oder abschwächen zu können, müssen wir daher annehmen, daß der Wert der Proposition $\mathcal{P}$ davon abhängt, mit welchen anderen Observablen $\mathcal{P}$ gemeinsam gemessen wird; das hat u.a. zur Folge, daß Observable, deren zugeordnete Operatoren vertauschbar sind, nicht mehr im gleichen Sinne verträglich sind wie in der Quanten-mechanik. Jedes Abschwächen der Forderung (3.40) setzt daher eine Änderung der Verträglichkeitsbedingung sowie der mathematischen Charakterisierung der Observablen voraus. Wie eine solche abgeschwächte Forderung (an die Observablenstruktur der Mikrozustände) und die neue mathematische Dar-stellung der Observablen aussehen könnten, wollen wir uns anhand eines konkreten Beispiels überlegen. Dazu untersuchen wir die Gültigkeit der Beziehung

$$P_1 \cdot P_2 = 0, \quad Q < P_1 + P_2 \quad \text{und} \quad {}^oP_1(x) = {}^oP_2(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad {}^oQ(x) = 0 \quad \forall x \quad (3.42).$$

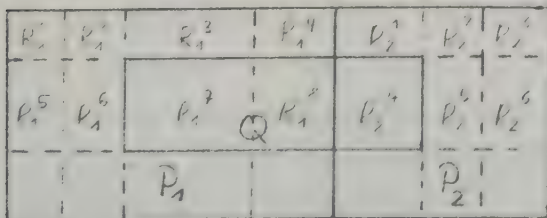
für die Ortsmessung atomarer Teilchen. Als Observable treten dabei die Zustandseigenschaften (Propositionen) "Das Teilchen befindet sich im Raumelement P" auf. Skizze 1 beschreibt eine stark idealisierte Situation



in der Teilchen eines bestimmten Makrozustandes vorgegeben sind. An diesen Teilchen - die sich nach den allgemeinen Annahmen der VWSTh zu jedem Zeitpunkt in einem wohldefinierten Mikrozustand befinden - sollen nun die Propositionen

R_1 , R_2 und Q (deren zugeordnete Projektionsoperatoren in den Beziehungen $R_1 \cdot R_2 = 0$, $Q \leq R_1 + R_2$ zueinander stehen) gemessen und die Gültigkeit der Beziehung (3.12) geprüft werden. Angenommen, die Messung an einem Teilchen im Mikrozustand x ergibt das Resultat ${}^o P_1(x) = {}^o P_2(x) = 0$; was folgt daraus für den Wert von ${}^o Q(x)$? Wie wir oben schon allgemein gesehen haben, ist die Folgerung ${}^o Q(x) = 0$ nicht denknotwendig, und es gibt mindestens zwei Möglichkeiten, dieser Folgerung auszuweichen: Erstens, indem man das Ergebnis von dem vorgegebenen Makrozustand des Teilchens abhängen läßt (siehe Antwort auf Frage (2)); und zweitens, indem man das Ergebnis von der zur Messung von Q verwendeten Versuchsanordnung abhängen läßt (siehe Antwort auf Frage (3)). Unser Beispiel ermöglicht nun eine nähere Analyse dieser Möglichkeiten und zeigt, daß schon quantentheoretische Überlegungen eine Abhängigkeit des Observablenwertes ${}^o Q(x)$ sowohl von dem vorgegebenen Makrozustand als auch von der Art des Q -Instrumentes nahelegen.

Was die Abhängigkeit vom Instrument betrifft, so hängt der Observablenwert ${}^o Q(x)$ wesentlich vom "Separationsverhalten"¹⁴⁾ des Instrumentes ab. Zerstören die Ortsmeßinstrumente für R_1 und R_2 bei ihrer Wechselwirkung mit dem Teilchen die Kohärenz zwischen den linearen Teilräumen des Hilbertraumes, die den Propositionen "Das Teilchen befindet sich im Raumelement R_v^i " entsprechen, so "objektiviert" eine positive R_1 -Messung ja "in Wirklichkeit" die Tatsache



$\bigvee_i (\text{Teilchen in } R_v^i)$,
so "objektiviert" eine positive R_1 -Messung ja "in Wirklichkeit" die Tatsache

$$\bigvee_i (\text{Teilchen in } R_v^i)$$

auch wenn das Instrument nur das Ergebnis "Teilchen in P_1 " registriert. Erhalten wir also bei gleichzeitiger Messung von R_1 und R_2 am Mikrozustand x (durch Instrumente mit R_v^i -Separation) das Ergebnis ${}^o P_1(x) = {}^o P_2(x) = 0$, so besteht das objektive Resultat " $\neg (\bigvee_{v=1,2} \bigvee_i \text{Teilchen in } R_v^i)$ " und damit gilt erst recht " $\neg (\bigvee_{R_v^i \leq Q} \text{Teilchen in } R_v^i)$ ".

Besitzt also das $\mathcal{Q}$ -Instrument das gleiche - oder ein feineres - Separationsverhalten wie die $\mathcal{P}_\nu$ -Instrumente, so zwingen uns die quantentheoretischen Vorstellungen tatsächlich zu der Folgerung

$${}^o\mathcal{P}_1(x) = {}^o\mathcal{P}_2(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad {}^o\mathcal{Q}(x) = 0$$

Messen wir dagegen die Propositionen $\mathcal{P}_\nu$ und $\mathcal{Q}$ mit "ideal konservativen" Instrumenten, so gibt es (außer der klassischen Vorstellung vom Begriff des Ortes) keinen Grund zu der Annahme, daß bei ${}^o\mathcal{P}_1(x) = {}^o\mathcal{P}_2(x) = 0$ auch ${}^o\mathcal{Q}(x) = 0$ gelten müsse. Denn die Beziehung (3.12) ist in diesem Fall weder experimentell verifizierbar noch - bei streng operativer Definition der Observablen - physikalisch einsichtig.

In analoger Weise erhalten wir auch eine Abhängigkeit des Observablenwertes ${}^o\mathcal{Q}(x)$ von dem vorgegebenen Makrozustand der Teilchen: Wurde ein Teilchen so präpariert, daß es sich vor der Messung mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeitsverteilung in einem der Raumelemente $\mathcal{R}_\nu^i$ aufhält, so fordert das Ergebnis ${}^o\mathcal{P}_1(x) = {}^o\mathcal{P}_2(x) = 0$ (auch bei einer Messung mit konservativen $\mathcal{P}_\nu$ -Instrumenten) zwangsläufig den Wert ${}^o\mathcal{Q}(x) = 0$; in einem anderen Makrozustand gilt dieser Schluß nicht.

Dieses einfache Beispiel zeigt zunächst noch einmal, daß die Beziehung (3.10) nicht notwendig aus der Erfahrung folgt und sich daher abschwächen läßt. Darüber hinaus aber ermöglicht uns das Beispiel auch, die Begriffe Makrozustand, Observable und Verträglichkeit in konsistenter Weise neu zu präzisieren.

In Verallgemeinerung der Ergebnisse der Analyse unseres Beispiels machen wir in der VWSTh folgende Annahmen: Eine Observable $\mathcal{O}$ mit entartetem Spektrum ist durch Angabe des ihr von der Quantenmechanik zugeordneten Operators A allein nicht eindeutig bestimmt, sondern muß durch eine zusätzliche Beschreibung der Art der Wechselwirkung des Meßinstrumentes mit dem Objekt (die sich in einem bestimmten Separationsverhalten auswirkt) noch näher charakterisiert werden. Analoges gilt natürlich für den Makrozustand, da Makrozustände in der Quantentheorie ja generell durch präparative Messungen definiert sind. Folgerichtig betrachtet die VWSTh zwei Observable genau dann als verträglich, wenn ihre Instrumente das gleiche Separationsverhalten besitzen. Das bedeutet, zwei Observable, definiert durch Meßanordnungen mit verschiedenem Separationsverhalten, werden in der VWSTh selbst dann als unverträglich betrachtet (und das heißt, daß die Werte dieser Observablen unkorreliert sind), wenn die Quantenmechanik beiden Observablen den gleichen Operator zuordnet, d.h. wenn beide Observablen im Sinne der Quantenmechanik identisch sind.

Es ist klar, daß diese neu konzipierten Observablen und Makrozustände nicht mehr durch Operatoren dargestellt werden können wie in der Quantenmechanik, sondern eine neue mathematische Darstellung fordern. Diese neue mathematische Darstellung der Observablen und Makrozustände ergibt sich aber unschwer aus der oben geschilderten physikalischen Charakterisierung:

A n n a h m e "Jede (diskrete) Observable $\mathcal{O}$ eines physikalischen Systems wird in der VWSTh umkehrbar eindeutig charakterisiert durch ein Paar

$\{A, 1^\alpha = \sum_{j \in J} Q_j\} =: A^\alpha$, bestehend aus dem selbstadjungierten Operator (mit diskretem Spektrum) $A = \sum_{v \in K \subseteq \mathbb{N}} a_v P_{a_v}$, den die Quantenmechanik dieser Observablen zuordnet, und der "Zerlegung der Einheit" $1^\alpha = \sum_{j \in J} Q_j$, die das Separationsverhalten des - die Observable definierenden - Instrumentes beschreibt." [3.1]

(Die Gesamtheit aller Zerlegungen der Einheit im Hilbertraum des betrachteten physikalischen Systems denken wir uns umkehrbar eindeutig den Elementen einer gleichmächtigen Indexmenge J zugeordnet, so daß wir im folgenden eine Zerlegung der Einheit durch ihren Index ersetzen können. Außerdem werden wir im folgenden eine Observable $\mathcal{O}$ meist durch ihr Bild A^α bezeichnen.)

Aus den (der obigen Annahme zugrunde liegenden) physikalischen Vorstellungen ergibt sich unmittelbar, daß die Zerlegung der Einheit $1^\alpha = \sum Q_j$ feiner sein muß als die (durch die "Normaldarstellung $A = \sum a_v P_{a_v}$ des Operators A gegebene) Zerlegung der Einheit $1 = \sum P_{a_v}$.

Daher gibt es in unserer Theorie zu jeder (diskreten) Observablen genau zwei ausgezeichnete Darstellungen des Operators A

$$A = \sum_{v \in K} a_v P_{a_v} \quad \text{und} \quad A = \sum_{j \in J} a_j Q_j$$

zwischen denen folgender Zusammenhang besteht: Zu jedem Projektionsoperator P_{a_v} gibt es eine Indexmenge $J_v \subseteq J$ mit der Eigenschaft

$$P_{a_v} = \sum_{j \in J_v} Q_j \quad \text{und} \quad a_j = a_v \quad \forall j \in J_v$$

Natürlich sind die obigen Überlegungen nur für Observable mit entartetem Spektrum notwendig und nicht-trivial. Für eine Observable B^β mit dem zugeordneten entartungsfreien Operator $B = \sum_v b_v |b_v\rangle\langle b_v|$ gibt es keine feinere Zerlegung der Einheit als die durch B definierte. Folglich wird die "entartungsfreie" Observable B^β bereits durch Angabe des zugeordneten Operators B allein eindeutig bestimmt und der Index β bedeutet keine zusätzliche Charakterisierung der Observablen.

Analog zur obigen Annahme über Observable ändert sich auch die Konzeption der Makrozustände:

Annahme "Jeder Makrozustand eines physikalischen Systems wird in der VWSTh umkehrbar eindeutig charakterisiert durch ein Paar

$\{W, 1^\varepsilon = \sum_v P_v\} =: W^\varepsilon$, bestehend aus dem Zustandsoperator W , den die Quantenmechanik diesem Makrozustand zuordnet, und der Zerlegung der Einheit, die das Separationsverhalten der den Makrozustand definierenden Präparation beschreibt."

Aus diesen Annahmen über Observable und Makrozustände ergibt sich auch unmittelbar die neue Verträglichkeitsbedingung:

Definition Zwei Observable heißen verträglich im Sinne der VWSTh (VWS-verträglich), wenn sie die gleiche Zerlegung der Einheit besitzen.

Nach diesem neuen Verträglichkeitsbegriff können VWS-verträgliche Observable in beliebiger Zahl gemeinsam gemessen werden, ohne daß der gemessene Wert einer Observablen durch die gleichzeitige Messung der übrigen Observablen beeinflußt wird. Das bedeutet aber, daß die Werte VWS-verträglicher Observablen nicht in beliebiger Kombination, sondern nur in dem durch die Erfahrung gegebenen Zusammenhang auftreten können. Daraus ergibt sich unmittelbar die gesuchte abgeschwächte Mindestforderung an die Observablenstruktur der Mikrozustände:

Forderung Die Observablenwertfunktionen der VWSTh genügen der Beziehung $f({}^\circ A^\alpha) = {}^\circ f(A)^\alpha$ (3.13)

für alle $\alpha \in \mathcal{D}$ und alle borelmeßbaren Funktionen f .

Schließlich bleiben noch zwei Punkte zu erwähnen, in denen die früheren Annahmen der VWSTh durch die neue mathematische Darstellung der Observablen und Makrozustände geringfügig modifiziert werden müssen.

(a) Die zeitliche Entwicklung der Makrozustände im Schrödinger-Bild bzw. der Observablen im Heisenberg-Bild definieren wir in der VWSTh folgendermaßen

$$W^\varepsilon(t) := \left\{ u_t W u_t^+, 1^{\bar{u}_t(\varepsilon)} = \sum_v u_t P_v u_t^+ \right\} = (u_t W u_t^+)^{\bar{u}_t(\varepsilon)}$$

$$A^\alpha(t) := \left\{ u_t^+ A u_t, 1^{\bar{u}_t(\alpha)} = \sum_j u_t^+ Q_j u_t \right\} = (u_t^+ A u_t)^{\bar{u}_t(\alpha)}$$
(3.14)

(b) Mit den neuen Observablenwertfunktionen und den neuen Maßen erhalten wir an Stelle von (3.2) die modifizierte Forderung

$$E_w^\varepsilon(A^\alpha) = \int_{\Omega} {}^\circ A^\alpha(x) d\mu_w^\varepsilon = S_P(AW)$$
(3.15)

Nachdem es nun gelungen ist, die physikalisch sinnvolle, abgeschwächte Forderung (3.43) zu finden, ergeben sich natürlich erneut die beiden Fragen, die die ganze Diskussion um Forderung (3.40) verursacht haben: Ist die abgeschwächte Forderung (3.43) hinreichend schwach, um - im Gegensatz zu Forderung (3.40) - jeden Widerspruch zu den übrigen Annahmen der VWSTh auszuschließen? Und ist die abgeschwächte Forderung (3.43) auch stark genug, um jeden Widerspruch zwischen den formalen Eigenschaften der Mikrozustände der VWSTh und den allgemeinen Vorstellungen von physikalischen Zuständen auszuschließen?

Endgültig können wir beide Fragen erst beantworten, wenn wir das vollständige Axiomensystem der VWSTh kennen. Aber eine wichtige Teil-Antwort läßt sich doch schon jetzt geben: Die ganze Suche nach einer abgeschwächten Forderung war doch nur dann erfolgreich, wenn der in Satz (1) gefundene Widerspruch zwischen der starken Forderung (3.40) und den übrigen Annahmen der VWSTh durch die in (3.43) vorgenommene Abschwächung von (3.40) aufgehoben wird. Daher wollen wir uns davon überzeugen, daß dieser Widerspruch tatsächlich aufgehoben ist.

Mit der Begründung von Lemma (3.4) erhalten wir für die neuen Observablenwertfunktionen die Beziehungen

$$f(^{\circ}A^{\alpha}) = ^{\circ}f(A)^{\alpha} \iff ^{\circ}A^{\alpha} = \sum_{\nu} a_{\nu} ^{\circ}p_{a_{\nu}}^{\alpha} \quad (3.16)$$

$$f(^{\circ}A^{\alpha}) = ^{\circ}f(A)^{\alpha} \implies \left(P \cdot Q = 0 \implies ^{\circ}P^{\tau} \cdot ^{\circ}Q^{\tau} = 0, ^{\circ}P^{\tau} + ^{\circ}Q^{\tau} = ^{\circ}(P+Q)^{\tau} \nmid \tau \right)$$

d.h. mit der abgeschwächten Forderung (3.43) sind die Beziehungen (2) und (3) von Lemma (3.4) nur noch für VWS-verträgliche Observable gültig. Unter diesen abgeschwächten Voraussetzungen gilt aber die Behauptung des Lemmas von Gleason und Bell nicht mehr, und damit entfällt auch der in Satz (1) gefundene Widerspruch. Wir können also die Forderung (3.43) ohne Skrupel in das Axiomensystem der VWSTh aufnehmen.

Die zweite Frage läßt sich nur insoweit beantworten, als sie die - durch Forderung (3.43) implizierten - allgemeinen Eigenschaften aller Mikrozustände des Zustandsraumes betrifft. Zusätzliche Eigenschaften, die allen Mikrozuständen eines bestimmten Ensembles durch die Auswahlfunktion des Ensemble-Maßes μ_w^{ε} aufgeprägt werden, können wir erst später betrachten. Beschränken wir die zweite Frage auf die allgemeinen Eigenschaften aller Mikrozustände, so gibt es in der Tat keinen Widerspruch. Denn wir haben ja die Forderung (3.43) gerade aus den (anhand

der Analyse unseres Beispiels entwickelten) physikalischen Vorstellungen vom Mikrozustand der VWSTh abgeleitet. Allerdings haben wir diese Harmonie nur dadurch erreicht, daß wir die physikalischen Vorstellungen vom Mikrozustand eines Systems stark operativ gefärbt haben, wodurch leider viele "schöne" Eigenschaften der Zustände von Systemen der klassischen Physik verloren gingen. Damit haben wir die Widersprüche zwischen dem mathematischen Formalismus der WSTh und den physikalischen Vorstellungen einer Ensembletheorie diskutiert und gezeigt, durch welche formalen Annahmen sie sich vermeiden lassen.

Bleibt als letzter der in § 2.3 aufgeführten Mängel der WSTh noch der Widerspruch zwischen den mathematischen Konsequenzen der WSTh und der Erfahrung in der Beschreibung des quantentheoretischen Meßprozesses zu erörtern. Im Gegensatz zu den oben besprochenen Mängeln handelt es sich hierbei nicht um einen immanenten Widerspruch der WSTh. Da außerdem die Beschreibung des Meßprozesses im Rahmen der VWSTh durch die übrigen Annahmen der VWSTh bereits festgelegt ist, besteht weder ein Anlaß noch die Möglichkeit, die Beschreibung des Meßprozesses zu ändern. Man muß "lediglich" bei der konkreten mathematischen Konstruktion der Maße und Observablenwertfunktionen von vornherein darauf achten, daß die Resultate der Beschreibung des Meßprozesses der Erfahrung nicht widersprechen. Um das zu erreichen, nehmen wir in das Axiomensystem der VWSTh eine Forderung auf, die jeden Widerspruch zwischen der (in Annahme ⑨ von § 2.1 erlauterten) Beschreibung des Meßprozesses und der Erfahrung ausschließt. Das bedeutet konkret eine Forderung an die Maße und Observablenwertfunktionen der VWSTh, die sicherstellt, daß die in der Beschreibung des Meßprozesses auftretenden Ensembles vor und nach der Ensemblereduktion den aus der Quantenmechanik bekannten Makrozuständen entsprechen. Daraus ergibt sich unmittelbar die

F o r d e r u n g Ist W_1^ε der Makrozustand des zusammengesetzten Systems "Objekt + Instrument" unmittelbar nach Beendigung der Wechselwirkung zwischen Objekt und A^α -Instrument, und ist W_2^s der Makrozustand des zusammengesetzten Systems unmittelbar nach der Messung des Wertes $A^\alpha = a_k$ so gilt die Beziehung

$$\int B^B(x) a_k [(A \times I)^\alpha = a_k] d\mu_{W_1}^\varepsilon = \int a_k [(A \times I)^\alpha = a_k] d\mu_{W_1}^\varepsilon \cdot \int B^B(x) d\mu_{W_2}^s$$

für alle Observablen B^B des zusammengesetzten Systems [3.2].

Damit haben wir alle in § 2.3 aufgeführten Mängel der WSTh erörtert, und gezeigt, durch welche formalen Annahmen sie sich ausschließen lassen.

3.2 Das Axiomensystem einer verbesserten WSTh

Bevor wir nun das gesuchte Axiomensystem der VWSTh aufstellen, wollen wir uns noch über folgende Fragen klar werden. (1) Inwieweit müssen die allgemeinen Annahmen ① bis ⑨ der WSTh durch die Ergebnisse der Diskussion von § 3.1 modifiziert werden? (2) Haben wir in der Diskussion von § 3.1 bereits alle Folgerungen erörtert, die sich aus den Annahmen ① bis ⑨ für die mathematische Struktur der VWSTh ergeben? (3) Besitzt die mathematische Struktur der WSTh noch nicht erwähnte, spezielle Eigenschaften, die in den bisherigen Forderungen an die VWSTh noch nicht enthalten sind, die wir aber aus physikalischen Gründen auch für die VWSTh fordern sollten?

ad (1): Eine Durchsicht der Annahmen ① bis ⑨ zeigt unmittelbar, daß die Annahmen ①, ②, ④, ⑤, ⑥, ⑧ und ⑨ von den Überlegungen in § 3.1 unberührt bleiben. Die übrigen Annahmen werden nur insoweit abgeändert, als die Begriffe "Observable", "Makrozustand" und "Verträglichkeit" gemäß den Überlegungen von § 3.1 neu konzipiert und ihrer mathematischen Darstellung leicht geändert wurden.

ad (2): Ein Vergleich der Annahmen ① bis ⑨ mit den in § 3.1 formulierten Forderungen der VWSTh ergibt, daß lediglich die Konsequenzen von Annahme ⑧ für die mathematische Struktur der VWSTh noch nicht untersucht wurden. In Annahme ⑧ wird gefordert, daß sich die Wahrscheinlichkeitsverteilung der virtuellen Systeme eines Ensembles bei der zeitlichen Entwicklung des Originalsystems nicht ändert. Diese Forderung entspricht etwa der "Erhaltung der Phasendichte" bei der Zustandsströmung im Γ -Raum der klassischen statistischen Mechanik (Satz von Liouville) und läßt sich im Rahmen der VWSTh in folgende Form bringen

$$\frac{d}{dt} \mu_{w(t)}^{u_t(\varepsilon)}(T_t M) = 0 \quad \forall M \in \mathcal{L} \quad (3.17)$$

Wegen

$$\begin{aligned} \mu_{w(t)}^{u_t(\varepsilon)}(T_t M) &= \int \varphi_M [T_t M] d\mu_{w(t)}^{u_t(\varepsilon)} = \int \chi_{T_t M}(x) d\mu_w^\varepsilon(T_t^{-1} x) \\ &= \int \chi_M(T_t^{-1} x) d\mu_w^\varepsilon(T_t^{-1} x) = \int \chi_M(y) d\mu_w^\varepsilon(y) = \mu_w^\varepsilon(M) \end{aligned}$$

folgt aber die Beziehung (3.17) bereits aus der Annahme (3.5) und braucht daher nicht zusätzlich im Axiomensystem der VWSTh berücksichtigt zu werden.

ad (3): Eine nähere Betrachtung der WSTh ergibt schließlich noch zwei physikalisch bedeutsame Eigenschaften der Zustandsströmung in der WSTh, die wir für die VWSTh bisher nicht gefordert haben, nämlich die beiden Stetigkeitseigenschaften

$$\lim_{|t_1 - t_2| \rightarrow 0} \|T_{t_1} x - T_{t_2} x\| = 0 \quad (3.18)$$

$$\lim_{|t_1 - t_2| \rightarrow 0} \mu_w^\varepsilon(T_{t_1} M \Delta T_{t_2} M) = 0 \quad (3.19)$$

Beziehung (3.18) besagt, daß die einzelnen virtuellen Systeme eine stetige Bewegung vollziehen, und Beziehung (3.19) bedeutet eine - wenn auch schwache - Korrelation "benachbarter" Bahnen, d.h. eine gewisse räumliche Gleichmäßigkeit der Bewegung benachbarter virtueller Systeme. Da beide Eigenschaften von den physikalischen Vorstellungen einer deterministischen Ensembletheorie nahe gelegt werden und bereits in der WSTh gelten, werden wir sie auch für die VWSTh fordern.

Damit sind wir nun in der Lage, das gesuchte Axiomensystem der VWSTh aufzustellen:

A X I O M 0 Ein quantentheoretisches System ist charakterisiert (1) durch die Menge der Observablen, die sich an diesem System messen lassen, (2) durch die Menge der Makro- und Mikrozustände, in denen das System existieren kann, und (3) durch die Gesetzmäßigkeit der zeitlichen Änderung seiner Zustände unter vorgegebenen Bedingungen.

A X I O M 1 Jedem quantentheoretischen System ist ein komplexer separabler Hilbertraum $\mathcal{K}$ mit folgenden Eigenschaften zugeordnet:

(a) Es existiert eine bijektive Abbildung $\mathcal{O}$ der Menge aller Observablen des Systems auf die Menge aller Paare $\{A, (E_\lambda)^\alpha\}$, bestehend aus dem selbstadjungierten Operator, den die Quantenmechanik der betreffenden Observablen zuordnet und der Spektralschar $(E_\lambda)^\alpha$, die das Separationsverhalten der Observablen beschreibt. Ist $A^\alpha = \mathcal{O}^{-1}\{A, (E_\lambda)^\alpha\}$ so gilt $f(A^\alpha) = \mathcal{O}^{-1}\{f(A), (E_\lambda)^\alpha\} = f(A)^\alpha$.

(b) Es existiert eine bijektive Abbildung $\mathcal{V}$ der Menge aller Makrozustände auf die Menge aller Paare $\{W, 1^\lambda = \sum_V P_V\}$, bestehend aus dem Zustandsoperator W , den die Quantenmechanik diesem Makrozustand zuordnet, und der Zerlegung der Einheit $1^\lambda = \sum_V P_V$, die das Separationsverhalten der den Makrozustand definierenden Präparation beschreibt.

(c) Die zeitliche Entwicklung des Makrozustandes $W^\varepsilon = \mathcal{V}^{-1}\{W, 1^\varepsilon\}$ ist eindeutig bestimmt durch den unitären Entwicklungsoperator, den die Quantenmechanik dem System zuordnet und wird beschrieben durch die Beziehung $W^\varepsilon(t_1) = \mathcal{V}^{-1}\{U(t_1, t_0)W(t_0)U^+(t_1, t_0), 1^{\varepsilon} = \sum_V U_R U^+\}$ (3.21)

A X I O M [2] Zu jedem quantentheoretischen System existiert ein metrischer Raum Ω mit folgenden Eigenschaften

(a) Jeder Observablen A^α des Systems ist umkehrbar eindeutig eine Abbildung $\Omega \xrightarrow{A^\alpha} \mathbb{C}^T(A)$ des Raumes Ω auf das Spektrum des Operators A zugeordnet.

(b) Zwischen den Observablenwertfunktionen ${}^\circ A^\alpha$ besteht die Beziehung

$$f({}^\circ A^\alpha) = {}^\circ f(A)^\alpha \quad \text{für alle borelmeßbaren Funktionen } f. \quad (3.22)$$

A X I O M [3] Auf Ω existiert eine σ -Algebra $(\Omega, \mathcal{L})$ mit folgenden Eigenschaften

(a) Alle Funktionen ${}^\circ A^\alpha$ sind $(\Omega, \mathcal{L})$ -meßbar.

(b) Zu jedem Makrozustand W^ε existiert genau ein normiertes Maß μ_w^ε auf $(\Omega, \mathcal{L})$ mit der Eigenschaft

$$\int_{\Omega} {}^\circ A^\alpha(x) d\mu_w^\varepsilon = \text{Sp}(AW) \quad (3.23)$$

A X I O M [4] Jedem unitären Operator U aus $\mathcal{H}$ ist umkehrbar eindeutig eine bijektive, in beiden Richtungen $(\Omega, \mathcal{L})$ -meßbare Transformation T von Ω auf sich zugeordnet. Und jeder kontinuierlichen einparametrischen Gruppe U_t von unitären Transformationen in $\mathcal{H}$ entspricht durch diese Zuordnung eine kontinuierliche einparametrische Gruppe von bijektiven, in beiden Richtungen $(\Omega, \mathcal{L})$ -meßbaren Transformationen T_t von Ω auf sich mit den Eigenschaften

$$(a) \lim_{|t_1 - t_2| \rightarrow 0} \|T_{t_1} x - T_{t_2} x\| = 0 \quad \forall x; \forall t_1, t_2 \quad (3.24)$$

$$(b) \lim_{|t_1 - t_2| \rightarrow 0} \mu_w^\varepsilon(T_{t_1} N \Delta T_{t_2} N) = 0 \quad \forall W^\varepsilon, \forall N \in \mathcal{F} \quad (3.25)$$

$$(c) \mu_{uwu^+}^{u(\varepsilon)}(M) = \mu_w^\varepsilon(T^{-1}M) \quad \forall M \in \mathcal{L}, \forall W^\varepsilon \quad (3.26)$$

$$(d) {}^\circ (u^+ A u)^{\bar{u}(\alpha)}(x) = {}^\circ A^\alpha(Tx) \quad \forall x, \forall A^\alpha \quad (3.27)$$

A X I O M 5 Ist W_1^ε der Makrozustand des zusammengesetzten Systems "Objekt + zur idealen Messung der Observablen A^ε geeignetes Instrument" unmittelbar nach der zur Messung notwendigen Wechselwirkung zwischen Objekt und Instrument, und ist W_2^ε der Makrozustand des zusammengesetzten Systems nach der auf die Wechselwirkung folgenden Ablesung des Wertes $A^\varepsilon = a_k$, so gilt die Beziehung

$$\int B^F(x) \mathcal{U}[\circ(A \times 1)^2 = a_k] d\mu_{W_1}^\varepsilon = \int \mathcal{U}[\circ(A \times 1)^2 = a_k] d\mu_{W_1}^\varepsilon \cdot \int B^F d\mu_{W_2}^\varepsilon \quad (3.28)$$

für alle Observablen B^F des zusammengesetzten Systems.

Wir haben das obige Axiomensystem bewußt auf die rein mathematischen Forderungen an die Struktur der VWSTh beschränkt. Für alle Fragen der physikalischen Interpretation eines diesem Axiomensystem genügenden mathematischen Modells gelten nach wie vor die allgemeinen Überlegungen aus § 2.1. Die einzelnen Axiome dieses Axiomensystems wurden in § 3.1 allein unter dem Gesichtspunkt ausgewählt, daß jede "Realisierung" des Axiomensystems als mathematischer Formalismus einer VWSTh interpretiert werden kann und die so entstehende VWSTh weder der Erfahrung noch den physikalischen Vorstellungen einer ensembletheoretischen Formulierung der Quantentheorie widerspricht. Für dieses Ziel mußten ziemlich starke Forderungen in das Axiomensystem aufgenommen werden, deren Erfüllbarkeit bzw. Verträglichkeit kaum plausibel erscheint, geschweige denn bewiesen ist. Damit stellt sich uns das entscheidende Problem, die Widerspruchsfreiheit des obigen Axiomensystems zu untersuchen. Daneben bleibt noch die Aufgabe, möglichst alle physikalisch relevanten Folgerungen aus einzelnen (als widerspruchsfrei erkannten) Axiomengruppen zu untersuchen, da diese Folgerungen ja Eigenschaften jeder VWSTh darstellen.

4. Untersuchung des Axiomensystems von § 3.2

4.1 Untersuchung der Verträglichkeit der die Ensemblekonstruktion bestimmenden Axiome

In § 4.1 untersuchen wir zunächst die Verträglichkeit der ersten vier Axiome des in § 3.2 aufgestellten Axiomensystems der VWSTh. Die vorläufige Beschränkung auf diesen Teil des Axiomensystems hat gute Gründe: 1.) Eine gesonderte Untersuchung der Axiome [0] bis [3] ist physikalisch sinnvoll, denn diese Axiomengruppe behandelt das eigenständige und grundlegende Problem, ob und in welcher Weise sich die quantentheoretischen Erwartungswerte als Ensemblemittelwerte im Sinne einer klassischen Ensembletheorie auffassen lassen. Es handelt sich hierbei gewissermaßen um das Problem einer "Rumpf"-Ensembletheorie, in der zu vorgegebenen Makrozuständen geeigneten Ensembles konstruiert werden, ohne daß dabei auf die zeitliche Veränderung der Ensembles eingegangen wird.

2.) In jeder VWSTh gibt es eine große Gruppe von Eigenschaften, die nur von der Art der Ensemblekonstruktion abhängen und daher bereits durch die ersten vier Axiome bestimmt sind; das gilt z.B. auch von der noch teilweise offenen Frage nach den Eigenschaften und der realen Bedeutung der Mikrozustände in der VWSTh. Auch aus diesem Grunde ist eine gesonderte Untersuchung der ersten vier Axiome und ihrer Konsequenzen sinnvoll.

3.) Schließlich beschränkt sich der größte Teil der Arbeiten über die Möglichkeit von VPTh'en auf den Bereich der Quantentheorie, der durch die Axiome [2] bis [3] charakterisiert wird. Diese Beschränkung auf das Problem der Ensemblekonstruktion beruht wohl auf der Überzeugung, daß eine kritische Diskussion dieses fundamentalen Teils der Quantentheorie bereits ausreicht, um deterministische Neuformulierungen der Quantentheorie als inkonsistent oder grundlegenden physikalischen Vorstellungen widersprechend auszuweisen. Daher ist eine gesonderte Behandlung der ersten vier Axiome auch für den Vergleich mit der einschlägigen Literatur wichtig.

Um die Frage nach der Verträglichkeit der Axiome [0] bis [3] positiv zu beantworten, wollen wir ein geeignetes Modell konstruieren, in dem diese Axiome gelten. Zur Konstruktion eines möglichst einfachen Modells ist es nützlich, sich folgende Tatsachen klar zu machen:

- (a) Alle Observablenwertfunktionen ${}^{\circ}A^{\alpha}$ sind Zufallsgrößen auf den Wahrscheinlichkeitsräumen $(\Omega, \mathcal{L}, \mu_w^{\varepsilon})$.
- (b) Die Menge aller Observablen A^{α} zerfällt in Äquivalenzklassen $\{\alpha\}$ von VWS-verträglichen Observablen, d.h. von Observablen mit der gleichen Spektralschar. [4.1]
- (c) Zu jeder Observablen A^{α} existiert eine borelmeßbare Funktion φ mit der Eigenschaft $A = \varphi(K_{\alpha})$, wenn $K_{\alpha} = \int \lambda dE_{\lambda}$ der von der Spektralschar $\alpha = (E_{\lambda})$ erzeugte Operator ist.
- (d) Die Axiome [0] bis [3] fordern keine Beziehungen zwischen Observablenwertfunktionen zu VWS-unverträglichen Observablen. Der Einfachheit halber können wir daher zusätzlich voraussetzen, daß die Zufallsgrößen ${}^{\circ}A_1^{\alpha_1}, {}^{\circ}A_2^{\alpha_2}, \dots, {}^{\circ}A_n^{\alpha_n}$ insgesamt unabhängig sind, wenn keine zwei der Indizes α_i gleich sind.

Diese Tatsachen erlauben uns nun, nach bekannten Methoden der Wahrscheinlichkeitstheorie ein "Standard-Modell" der Axiome [0] bis [3] zu konstruieren. Die Grundidee dabei ist folgende: In einem ersten Schritt ordnen wir jeder Klasse $\{\alpha\}$ von Observablen einen bestimmten Raum Ω_{α} zu und konstruieren auf diesem Raum in geeigneter Weise zu jeder Observablen A^{α} eine Funktion $\tilde{A}^{\alpha}$ und zu jedem Makrozustand ein Maß $m_w^{\alpha, \varepsilon}$, die den Beziehungen (3.22) und (3.23) genügen. In zweiten Schritt konstruieren wir dann den gesuchten Raum Ω als direktes Produkt der Ω_{α} :

$$\Omega = \prod_{\alpha \in \mathcal{J}} \Omega_{\alpha} = \{x = (\xi_{\alpha}) \mid \xi_{\alpha} \in \Omega_{\alpha}\} \quad ; \text{ die Observablenwertfunktionen } {}^{\circ}A^{\alpha} \text{ definieren wir als eindimensionale Zylinderfunktionen}$$

$${}^{\circ}A^{\alpha}(x) = \tilde{A}^{\alpha}(\xi_{\alpha}(x)) \quad \text{und die Maße } \mu_w^{\varepsilon} \text{ als Produktmaße } \mu_w^{\varepsilon} = \bigotimes_{\alpha} m_w^{\alpha, \varepsilon}$$

Dadurch gelten die Beziehungen (3.22) und (3.23) automatisch auch für die Funktionen ${}^{\circ}A^{\alpha}$ und die Maße μ_w^{ε} .

Im einzelnen verläuft die Konstruktion unseres Modells folgendermaßen: Jeder Klasse $\{\alpha\}$ von Observablen ordnen wir als Raum Ω_{α} das Spektrum des Operators $K_{\alpha} = \int \lambda dE_{\lambda}$ zu. Sei A^{α} nun eine beliebige Observable aus der Klasse $\{\alpha\}$; dann gibt es eine borelmeßbare (und auf dem ganzen $\mathbb{R}$ definierte) Funktion φ mit der Eigenschaft $A = \varphi(K_{\alpha}) = \int \varphi(\lambda) dE_{\lambda}$. Mit dieser Funktion definieren wir nun die Funktionen $\tilde{A}^{\alpha}$ durch die Vorschrift

$$\tilde{A}^{\alpha}(\xi) := \varphi(\xi) \quad \text{für alle } \xi \in \Omega_{\alpha}. \text{ Insbesondere gilt für } K_{\alpha}^{\alpha}:$$

$$\tilde{K}_{\alpha}^{\alpha}(\xi) = \xi \text{ und daraus folgt } \tilde{A}^{\alpha} = \varphi(\tilde{K}_{\alpha}^{\alpha}) \quad (4.1)$$

Offensichtlich liefert diese Definition zu jeder Observablen A^{α} eine eindeutige Abbildung $\Omega_{\alpha} \xrightarrow{\tilde{A}^{\alpha}} \text{SpT}(A)$ des ganzen Raumes Ω_{α} auf das

ganze Spektrum von A ; und trivialerweise gilt die Beziehung $\varphi(\tilde{A}^{\alpha}) = \varphi(A)^{\alpha}$.

In Ω_α betrachten wir nun das Mengensystem

$$S = \{ \emptyset, \Omega_\alpha, \Omega_\alpha \cap (-\infty, \xi], \Omega_\alpha \cap (\gamma, \xi], \Omega_\alpha \cap (\gamma, \infty) \mid \xi \in \mathcal{E}, \gamma \in \Omega_\alpha \}$$

S ist ein Semiring und wir bezeichnen mit $\mathcal{L}_\alpha$ die kleinste σ -Algebra, die S enthält. Auf S definieren wir nun folgende Mengenfunktion:

$$m_w^{\alpha, \mathcal{E}} \{ \Omega_\alpha \cap (-\infty, \xi] \} = Sp(W E_\xi) \quad , \quad m_w^{\alpha, \mathcal{E}}(\emptyset) = 0 \quad ; \quad m_w^{\alpha, \mathcal{E}}(\Omega_\alpha) = 1$$

$$m_w^{\alpha, \mathcal{E}} \{ \Omega_\alpha \cap (\gamma, \xi] \} = m_w^{\alpha, \mathcal{E}} \{ \Omega_\alpha \cap (-\infty, \xi] \} - m_w^{\alpha, \mathcal{E}} \{ \Omega_\alpha \cap (-\infty, \gamma] \}$$

$$m_w^{\alpha, \mathcal{E}} \{ \Omega_\alpha \cap (\gamma, \infty) \} = 1 - m_w^{\alpha, \mathcal{E}} \{ \Omega_\alpha \cap (-\infty, \gamma] \} \quad (4.2)$$

Man überzeugt sich leicht davon, daß $m_w^{\alpha, \mathcal{E}}$ eine σ -additive Wahrscheinlichkeit auf S darstellt. Daher läßt sich $m_w^{\alpha, \mathcal{E}}$ auf genau eine Weise zu einem eindeutig definierten, normierten Maß auf $\mathcal{L}_\alpha$ fortsetzen, das wir im folgenden ebenfalls mit $m_w^{\alpha, \mathcal{E}}$ bezeichnen. Damit haben wir zu jeder Observablenklasse $\{\alpha\}$ und zu jedem Makrozustand $W^\mathcal{E}$ ein Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega_\alpha, \mathcal{L}_\alpha, m_w^{\alpha, \mathcal{E}})$ konstruiert. Auf Grund der Definition von $\mathcal{L}_\alpha$ ist es klar, daß alle Funktionen $\tilde{A}^\alpha$ $(\Omega_\alpha, \mathcal{L}_\alpha)$ -meßbar sind und daher Zufallsgrößen auf $(\Omega_\alpha, \mathcal{L}_\alpha, m_w^{\alpha, \mathcal{E}})$ darstellen. Um die Erwartungswerte sämtlicher Zufallsgrößen $\tilde{A}^\alpha$ zu berechnen, benötigen wir wegen (4.1) nur die Verteilungsfunktion $F(\lambda)$ der Zufallsgröße $\tilde{X}_\alpha(\xi) = \xi$.

Aus den bisherigen Annahmen ergibt sich:

$$\begin{aligned} F(\lambda) &:= m_w^{\alpha, \mathcal{E}} \{ \xi \in \Omega_\alpha \mid \xi \leq \lambda \} = m_w^{\alpha, \mathcal{E}} \{ \Omega_\alpha \cap (-\infty, \sup_{\xi \leq \lambda} \xi] \} \\ &= Sp(W E_{\sup_{\xi \leq \lambda} \xi}) = Sp(W E_\lambda) \end{aligned} \quad (4.3)$$

Die letzte Gleichung in (4.3) beruht auf zwei Eigenschaften der Spektralschar $(E_\lambda)^\alpha$, und zwar: (1) E_λ ist rechts-stetig, (2) E_λ ist konstant auf (μ, ν) , wenn alle $\lambda \in (\mu, \nu)$ regulär (d.h. $\lambda \notin \Omega_\alpha$).

Aus (4.1) und (4.3) ergibt sich:

$$\int \tilde{A}^\alpha(x) d m_w^{\alpha, \mathcal{E}} = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\lambda) d F(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\lambda) d Sp(W E_\lambda) = Sp(W A) \quad (4.4)$$

Damit ist der erste Schritt unserer Konstruktion erledigt. Im zweiten Schritt bilden wir nun das Produkt der eben konstruierten Wahrscheinlichkeitsräume $(\Omega_\alpha, \mathcal{L}_\alpha, m_w^{\alpha, \mathcal{E}})$ über alle Klassen $\{\alpha\}$ und erhalten:

$$(\Omega, \mathcal{L}, \mu_w^\mathcal{E}) := \left(\bigotimes_{\alpha \in \mathcal{G}} (\Omega_\alpha, \mathcal{L}_\alpha, m_w^{\alpha, \mathcal{E}}) \right) = \left(\prod_\alpha \Omega_\alpha, \bigotimes_\alpha \mathcal{L}_\alpha, \bigotimes_\alpha m_w^{\alpha, \mathcal{E}} \right)$$

Der Produktraum Ω besteht gerade aus sämtlichen $|B|$ -Tupeln $x = (\xi_\alpha)$, deren α -te Komponente $\xi_\alpha(x)$ in Ω_α liegt. Auf Ω definieren wir nun die gesuchten Observablenwertfunktionen ${}^\circ A^\alpha$ durch die Vorschrift

$${}^\circ A^\alpha(x) := \tilde{A}^\alpha[\xi_\alpha(x)] \quad (4.5)$$

Aus diesen Definitionen und den im ersten Schritt bewiesenen Eigenschaften der Funktionen $\tilde{A}^\alpha$ ergeben sich unmittelbar folgende Konsequenzen: (1) Jede durch (4.5) definierte Observablenwertfunktion ${}^\circ A^\alpha$ bildet den ganzen Raum Ω eindeutig auf das ganze Spektrum von A ab. (2) Die Observablenwertfunktionen genügen der Beziehung $f({}^\circ A^\alpha) = {}^\circ f(A)^\alpha$. (3) Alle Observablenwertfunktionen sind $(\Omega, \mathcal{L})$ -meßbar. Die Erwartungswerte der Zufallsgrößen ${}^\circ A^\alpha$ ergeben sich ebenfalls unmittelbar aus (4.5) und der Konstruktion der Produktmaße:

$$E_w^\varepsilon({}^\circ A^\alpha) = \int_\Omega {}^\circ A^\alpha(x) d\mu_w^\varepsilon = \int_{\Omega_\alpha} \tilde{A}^\alpha(\xi) d\tilde{m}_w^{\alpha, \varepsilon} = Sp(WA) \quad (4.6)$$

Damit haben wir folgenden Satz bewiesen:

S a t z (2) Die Axiome [0] bis [3] sind verträglich. Insbesondere gelten die Axiome [0] bis [3] in dem oben konstruierten Modell der G -Algebra $(\Omega, \mathcal{L})$ mit den Zufallsgrößen ${}^\circ A^\alpha$ und den Wahrscheinlichkeiten μ_w^ε .

Nachdem wir in Satz (2) (als Hauptergebnis von § 4.1) die Verträglichkeit der Axiome [0] bis [3] gezeigt haben, wollen wir nun zwei Folgerungen aus diesen Axiomen ableiten, die allgemein in jeder VWSTh gelten und nicht etwa auf das im Beweis von Satz (2) konstruierte Modell beschränkt sind.

L e m m a (4.1) (a) Aus den Axiomen [0] bis [3] folgt die Beziehung

"Aus $P \cdot Q = 0$ und $QW = 0$ oder $PW = 0$ ergibt sich

$${}^\circ P^\alpha \cdot {}^\circ Q^\beta = 0 [\mu_w^\varepsilon] \quad \forall \alpha, \beta, \varepsilon \quad (4.7)$$

(b) Beziehung (4.7) ist äquivalent der Beziehung

"Aus $R \leq S$ und $V \leq S$ oder $VR = 0$ folgt

$${}^\circ R^\alpha \leq {}^\circ S^\beta [\mu_v^\delta] \quad \forall \alpha, \beta, \delta \quad (4.8)$$

L e m m a (4.2) Hat der Hilbertraum eines physikalischen Systems mindestens drei Dimensionen, so steht die Beziehung

$$R \leq S \Rightarrow {}^\circ R^\alpha \leq {}^\circ S^\beta \quad \forall \alpha, \beta \quad (4.9)$$

oder die zu (4.9) äquivalente Beziehung

$$P \cdot Q = 0 \Rightarrow {}^\circ P^\alpha \cdot {}^\circ Q^\beta = 0 \quad \forall \alpha, \beta \quad (4.10)$$

im Widerspruch zu den Axiomen [2] bis [3].

Lemma (4.1) zeigt, daß - über die im ganzen Zustandsraum geltende Observablenstruktur (3.10) hinaus - in jedem Ensemble spezielle zusätzliche Beziehungen zwischen den Werten bestimmter Observablen für alle Mikrozustände des Ensembles gelten. Diese ensemblespezifischen Zusammenhänge werden durch das Ensemblemaß μ_w^E erzwungen, indem die Menge aller Mikrozustände mit einer anderen Observablenstruktur das μ_w^E -Maß 0 erhält (diese Zusammenhänge sind auch unabhängig von der Frage nach der stochastischen Unabhängigkeit der Zufallsgrößen Q^a und Q^b bei $a \neq b$). Diese Überlegungen bringen uns zu der Frage aus § 3.1 zurück, welche zusätzlichen Observablenrelationen den Mikrozuständen eines Ensembles durch das Ensemblemaß aufgezwungen werden. Mit Hilfe der Lemmata (4.1) und (4.2) können wir diese Frage nun beantworten, soweit sie sich überhaupt unabhängig von einem speziellen Modell beantworten läßt. Lemma (4.2) zeigt zunächst, daß sich die - nur innerhalb eines Ensembles geltenden - Observablenrelationen (4.7) und (4.8) nicht auf den ganzen Zustandsraum ausdehnen lassen (insofern läßt sich Lemma (4.1) auch nicht wesentlich verschärfen). Darüber hinaus ergibt sich aus Lemma (4.1) und (4.2) folgender allgemeiner Sachverhalt

K O R R O L L A R Ist w^E ein beliebiger Makrozustand und sind P und Q zwei beliebige Projektionsoperatoren mit $Pw \neq 0$ und $Qw \neq 0$ so gilt im allgemeinen

$$\mu_w^E \{ x \in \Omega \mid P^a(x) = Q^b(x) = 1 \} > 0 \quad \forall a, b \quad (4.11)$$

Das bedeutet: In einem (durch gleiche Präparation der einzelnen Systeme erzeugten) realen Kollektiv physikalischer Systeme im gleichen Makrozustand befindet sich i.a. ein von Null verschiedener Prozentsatz der Systeme in Mikrozuständen mit der Eigenschaft $P^a = Q^b = 1$ - unabhängig davon, ob P und Q orthogonal sind oder nicht. Das verträgt sich aber nur dann mit der experimentellen Erfahrung (nach der am gleichen Zustand bei $P, Q = 0$ nie $P, Q = 1$ gemessen wird), wenn wir den Observablenbegriff so abändern, daß zwei Propositionen mit orthogonalen Projektionsoperatoren nicht automatisch verträglich sind.

Diese Tatsachen zeigen einen großen Unterschied - aber auch eine charakteristische Analogie zwischen der Quantenmechanik und der VWSTh: In jedem quantenmechanischen Zustand sind viele andere - sowohl unverträgliche als auch sich gegenseitig ausschließende - Zustände überlagert (oder besser gesagt, potentiell enthalten); je nach der "experimentellen Fragestellung" treten andere Gruppen der vorher nur potentiell

vorhandenen Zustände in Erscheinung. In der VWSTh dagegen entspricht jedem Makrozustand ein ganzes Ensemble von (im Prinzip realen) Mikrozuständen, und in jedem Mikrozustand sind die Werte aller Observablen eindeutig festgelegt. Es gibt da keine Überlagerungen verschiedener Zustände und keinen Übergang von "potentieller" zu "realer Existenz" von Zuständen. Eine "experimentelle Fragestellung" wirkt - im Idealfall - lediglich als Filter. Aber - und hierin liegt die Analogie - zu jeder möglichen Kombination von Werten verschiedener Observablen, die in einem vorgegebenen quantenmechanischen Zustand - unabhängig voneinander und in verschiedenen Messungen - auftreten können, gibt es in dem (diesem quantenmechanischen Zustand) entsprechenden Ensemble der VWSTh einen Mikrozustand, der gerade diese Kombination von Observablenwerten besitzt - auch wenn diese Kombination verschiedene Observablenwerte vereinigt, die in der Quantenmechanik als unvereinbar gelten. Die VWSTh erkaufte also die eindeutige Bestimmtheit der Mikrozustände durch eine deutliche Schwächung der Observablenstruktur dieser Mikrozustände - entsprechend der Verschärfung der Unverträglichkeitsbeziehungen. Diese Überlegungen zeigen außerdem, daß die wichtigsten Prinzipien der Quantentheorie, die sich auf die Natur von Observablen und Quantenzuständen beziehen - wie die Unschärferelation und das Superpositionsprinzip - , in der VWSTh nur noch statistische Geltung besitzen; für den einzelnen Mikrozustand sind sie bedeutungslos.

Damit wollen wir die Erörterung der zusätzlichen, ensemblespezifischen Eigenschaften der Mikrozustände abschließen und uns der Frage zuwenden, ob die gesteigerte Unverträglichkeit der Observablen in der VWSTh noch weitere - über Lemma (4.1) und (4.2) hinausgehende - Folgen für die Struktur der Wahrscheinlichkeitsräume $(\Omega, \mathcal{L}, \mu_w^\epsilon)$ hat.

In der klassischen statistischen Mechanik gilt jede borelmeßbare Menge des Zustandsraumes als operativ sinnvoll, d.h. als - wenigstens im Prinzip - experimentell realisierbar. Die Gesamtheit der operativ sinnvollen Zustandsmengen bildet also eine σ -Algebra und ist damit auch gegen alle (in diesem Zusammenhang) physikalisch sinnvollen Mengenoperationen - wie die Bildung von Vereinigung, Durchschnitt, Komplement sowie von unterem und oberem Mengengrenzen - abgeschlossen. Diese Tatsache beruht darauf, daß alle Observablen der klassischen Physik - und damit alle mengendefinierenden Bedingungen - verträglich sind.

In der VWSTh dagegen - mit ihrem stark eingeschränkten Verträglichkeitsbegriff - gelten nur die Mengen $\mathcal{M}_p^\alpha := \{x \in \Omega \mid P^\alpha(x) = 1\}$ als operativ definierbar; und die Menge $\mathcal{P}$ aller Mengen $\mathcal{M}_p^\alpha$ ist nur gegen

die Bildung von Komplement und Vereinigung abgeschlossen. Schon die von $\mathcal{P}$ erzeugte, e n d l i c h e Mengenalgebra $\mathcal{F}$ enthält viele Mengen, die zwar vom Standpunkt der VWSTh physikalisch sinnvoll sind, die aber nicht operativ definiert sind. Es stellt sich hier die Frage, ob und wie sich der Unterschied in der physikalischen Bedeutung zwischen den operativ definierbaren und den "nur" theoretisch definierbaren Zustandsmengen auch in den mathematischen Eigenschaften dieser Mengensysteme widerspiegelt, d.h. ob die Mengen $\mathcal{M}_P^\alpha$ aus $\mathcal{P}$ vor den Elementen aus $\mathcal{F}$ mathematisch ausgezeichnet sind. Ein Vergleich der Wahrscheinlichkeitsräume von VWSTh und klassischer statistischer Mechanik ergibt zwei deutliche Unterschiede. Um diese Unterschiede aufzuzeigen, überlegen wir uns zunächst zwei notwendige Bedingungen für die "Gleichwertigkeit" der Mengensysteme $\mathcal{P}$ und $\mathcal{F}$ (die in der statistischen Mechanik erfüllt sind) und beweisen dann, daß diese Bedingungen in der VWSTh nicht erfüllt sind.

a) In der klassischen statistischen Mechanik gibt es Ensembles bzw. Makrozustände, die so "unscharf" sind, daß sie jeder (von der leeren Menge verschiedenen) offenen Menge des Zustandsraumes eine positive Wahrscheinlichkeit zuordnen (z.B. die kanonische Gesamtheit). Analog dazu gibt es in der Quantenmechanik gewisse Zustandsoperatoren $\hat{W}$, die so "unscharf" sind, daß sie jeder von 0 verschiedenen Proposition einen positiven Erwartungswert zuordnen, d.h. $Sp(\hat{W}P) > 0 \quad \forall P \neq 0$.

Folglich gibt es auch in der VWSTh Ensembles bzw. Maße mit der Eigenschaft $\mu_W^\varepsilon(\mathcal{M}_P^\alpha) > 0 \quad \forall P \neq 0 ; \forall \varepsilon, \alpha$

Diese Eigenschaft der Wahrscheinlichkeitsfelder $(\mathcal{L}, \mu_W^\varepsilon)$ gibt uns unmittelbar eine notwendige Bedingung für die Gleichwertigkeit der Mengen aus $\mathcal{P}$ und $\mathcal{F}$:

[B₂] Ist M eine beliebige Menge aus $\mathcal{F}$ mit $\mu_u^\varepsilon(M) > 0$ für mindestens einen Makrozustand u^ε , so gilt $\mu_W^\varepsilon(M) > 0$ für a l l e "extrem unscharfen" Makrozustände $\hat{W}^\varepsilon$.

b) Sind im Phasenraum der klassischen statistischen Mechanik zwei beliebige verschiedene, offene und punktfremde Mengen gegeben, so gibt es - wenigstens im Prinzip - stets ein Ensemble bzw. ein Maß, das beiden Mengen verschiedene Wahrscheinlichkeiten zuordnet. Ähnlich gibt es auch in der VWSTh zu zwei beliebigen verschiedenen Mengen M_1, M_2 aus $\mathcal{P}$ mit $M_1 \cap M_2 = \emptyset$ stets ein Maß μ_V^δ mit $\mu_V^\delta(M_1) + \mu_V^\delta(M_2)$. Diese Eigenschaft der Wahrscheinlichkeitsfelder liefert uns eine zweite notwendige Bedingung für die Gleichwertigkeit der Mengen aus $\mathcal{P}$ und $\mathcal{F}$:

[B₃] Sind M₁ und M₂ zwei beliebige Mengen aus $\mathcal{F}$ mit $M_1 \cap M_2 = \emptyset$ und $\mu_R^r(M_1 \cup M_2) > 0$ für mindestens einen Makrozustand R^r , so existiert stets mindestens ein Makrozustand U^s mit der Eigenschaft

$$\mu_U^s(M_1) \neq \mu_U^s(M_2)$$

Der folgende Satz beantwortet nun die Frage nach der Gültigkeit der Bedingungen [B₂] und [B₃] sowie ihrer Abhängigkeit von anderen Annahmen der VWSTh und gibt darüber hinaus einen Überblick über den in diesem Paragraphen behandelten Ausschnitt der mathematischen Struktur der WSTh. [4.4]

S a t z (3) Für den logischen Zusammenhang der Annahmen

[A₁] (a) Jedem Paar A^α , bestehend aus einem selbstadjungierten Operator A eines vorgegebenen Hilbertraums $\mathcal{H}$ und einer A-verträglichen Zerlegung der Einheit α aus $\mathcal{H}$, wird eine Abbildung $\Omega \xrightarrow{A^\alpha} \text{SpT}(A)$ eines Raumes Ω auf das Spektrum von A zugeordnet.

(b) Jedem Paar W^ε , bestehend aus einem positiv semidefiniten, normierten selbstadjungierten Operator W aus $\mathcal{H}$ und einer W-verträglichen Zerlegung der Einheit ε , wird ein normiertes Maß μ_W^ε auf einer σ -Algebra $(\Omega, \mathcal{L})$ zugeordnet.

(c) Alle Observablenwertfunktionen $^\circ A^\alpha$ sind $(\Omega, \mathcal{L})$ -meßbar, und keine Indikatorfunktion $^\circ p^\alpha = \text{Ch}[m_p^\alpha]$ (mit $p \neq 0$) ist Nullfunktion bezüglich aller Maße μ_W^ε .

(d) Für eine Gruppe von VWS-verträglichen Observablen P^α, R_i^α mit der Eigenschaft $P = \sum_i R_i$ gilt $^\circ P^\alpha = \sum_i ^\circ R_i^\alpha$.

Für eine Gruppe von Makrozuständen $W^\varepsilon, \frac{Q_v^\varepsilon}{\text{Sp}(Q_v)}$ zur gleichen Zerlegung der Einheit mit $W = \sum_v \lambda_v \frac{Q_v}{\text{Sp}(Q_v)}$ gilt

$$\mu_W^\varepsilon = \sum_v \lambda_v \mu_{Q_v/\text{Sp}(Q_v)}^\varepsilon$$

[A₂] Alle Observablenwertfunktionen und Maße genügen der Beziehung

$$\int_\Omega ^\circ A^\alpha d\mu_W^\varepsilon = \text{Sp}(AW)$$

[B₁] Für zwei beliebige Propositionen P^α und Q^β mit $P \leq Q$ gilt

$$^\circ P^\alpha \leq ^\circ Q^\beta \quad \forall x$$

[B₂] Ist M ein beliebiges Element aus $\mathcal{F}$ mit der Eigenschaft $\mu_U^r(M) > 0$ für mindestens einen Makrozustand U^r , so gilt $\mu_{\hat{W}^u}^u(M) > 0$ für alle "extrem unscharfen" Makrozustände $\hat{W}^u$.

$[B_3]$ Sind M, N zwei beliebige Elemente aus $\mathcal{F}$ mit den Eigenschaften $M \cap N = \emptyset$ und $\mu_u^r(M \cup N) > 0$ für mindestens einen Makrozustand u^r , so existiert mindestens ein Makrozustand V^δ mit der Eigenschaft

$$\mu_V^\delta(M) \neq \mu_V^\delta(N) .$$

gelten folgende Beziehungen:

(3.1) Aus $[A_1] \wedge [A_2] \wedge [B_2]$ oder $[A_1] \wedge [A_2] \wedge [B_3]$ folgt $[B_1]$.

(3.2) Ist die Dimension des vorgegebenen Hilbertraumes $\mathcal{H}$ größer als zwei, so sind die Kombinationen

$$((3.2,1)) \quad [A_1] \wedge [B_1]$$

$$((3.2,2)) \quad [A_1] \wedge [A_2] \wedge [B_k] \quad k=2,3$$

unverträglich; für $\dim \mathcal{H} = 2$ sind alle fünf Annahmen verträglich.

(3.3) Folgende Kombinationen von Annahmen sind verträglich:

$$((3.3,1)) \quad [A_1] \wedge [A_2] \wedge \neg[B_1] \wedge \neg[B_2] \wedge \neg[B_3]$$

$$((3.3,2)) \quad [A_1] \wedge \neg[A_2] \wedge \neg[B_1] \wedge [B_2] \wedge [B_3]$$

$$((3.3,3)) \quad [A_1] \wedge \neg[A_2] \wedge \neg[B_1] \wedge \neg[B_2] \wedge [B_3]$$

$$((3.3,4)) \quad [A_1] \wedge \neg[A_2] \wedge \neg[B_1] \wedge [B_2] \wedge \neg[B_3]$$

$$((3.3,5)) \quad [A_1] \wedge \neg[A_2] \wedge \neg[B_1] \wedge \neg[B_2] \wedge \neg[B_3]$$

Mit den unter (3.2) und (3.3) auftretenden Kombinationen sind auch alle (im Rahmen der VWSTh sinnvollen) Kombinationen der Annahmen $[A_1]$ bis $[B_3]$ untersucht.

Abschließend wollen wir noch kurz auf die physikalische Bedeutung der Ungültigkeit der Annahmen $[B_2]$ und $[B_3]$ für die VWSTh eingehen. Die Ungültigkeit von $[B_2]$ bedeutet: Auch wenn man sich bei der Präparation eines Makrozustandes noch so bemüht, alle Spuren von Präparation und Vorgeschichte des Systems so gut wie möglich zu verwischen - mit dem Erfolg, daß wenigstens keine Zustandseigenschaft P^α "ausgeschlossen" wird, so läßt es sich doch nie vermeiden, daß bestimmte endliche Kombinationen von Zustandseigenschaften ausgeschlossen werden. Die VWSTh erlaubt also keine so gleichmäßig alle Mikrozustände berücksichtigende Wahrscheinlichkeitsverteilung wie die klassische statistische Physik. Und die Ungültigkeit von $[B_3]$ bedeutet: In der VWSTh gibt es - bezogen auf die σ -Algebra $\mathcal{L}$ - so "wenig" Maße (oder nur so "grobe" Maße), daß man zwei schnittfremde Mengen aus $\mathcal{F} \setminus \mathcal{B}$ im allgemeinen nicht mit Hilfe

eines Maßes unterscheiden kann. Die Differenzierungsfähigkeit der Makrozustände für beliebige endliche Kombinationen von Zustandseigenschaften ist damit wesentlich geringer als in der klassischen statistischen Physik.

Damit schließen wir die Erörterung der ersten vier Axiome und ihrer Konsequenzen ab und wenden uns der Frage zu, ob sich auch die übrigen (in den Axiomen [4] und [5] enthaltenen) Forderungen an die VWSTh erfüllen lassen.

4.2 Untersuchung der Verträglichkeit aller Axiome, die Konstruktion und zeitliche Entwicklung der Ensembles bestimmen

Um neben der Verträglichkeit auch gleichzeitig die Unabhängigkeit der Axiome [4] und [5] (voneinander und von den übrigen Axiomen) zu entscheiden, klammern wir in diesem Paragraphen die Frage nach der Möglichkeit einer konsistenten Beschreibung des Meßprozesses im Rahmen der VWSTh noch aus und untersuchen zunächst die Verträglichkeit der Axiome [0] bis [4].

Die Verträglichkeit der ersten vier Axiome haben wir in Satz (2) durch Konstruktion eines geeigneten Modells bewiesen; es liegt daher nahe, zuerst zu prüfen, ob dieses Modell auch bereits die in Axiom [4] geforderten Eigenschaften besitzt. Sei $\{U_t\}$ eine beliebige einparametrische kontinuierliche Gruppe von unitären Transformationen im Hilbertraum des betrachteten Systems und sei $\{T_t\}$ die entsprechende Menge von Punkttransformationen von Ω auf sich. Dann ergibt sich aus der Identität

$${}^0P^\alpha(Tx) = \text{Ch} [T^{-1} \mathcal{M}_P^\alpha] \quad \text{und Axiom [4.d]} \quad \text{die Beziehung}$$

$$\text{Ch} [\mathcal{M}_{U_t^+ P U_t}^{\bar{u}_t(\alpha)}] = \text{Ch} [T_t^{-1} \mathcal{M}_P^\alpha]$$

und damit folgt aus Axiom [4.b]

$$\lim_{|t_1 - t_2| \rightarrow 0} \mu_w^\varepsilon \left(\mathcal{M}_{U_{t_1}^+ P U_{t_1}}^{\bar{u}_{t_1}(\alpha)} \Delta \mathcal{M}_{U_{t_2}^+ P U_{t_2}}^{\bar{u}_{t_2}(\alpha)} \right) = 0 \quad (4.12)$$

Nun ist $\mathcal{M}_1 \Delta \mathcal{M}_2 = (\mathcal{M}_1 \cap \mathcal{M}_2) \cup (\mathcal{M}_1 \setminus \mathcal{M}_2) \cup (\mathcal{M}_2 \setminus \mathcal{M}_1)$ und auf Grund der Konstruktion der Maße μ_w^ε (als Produktmaße aus eindimensionalen Randmaßen) erhalten wir

$$\begin{aligned} \mu_w^\varepsilon (\mathcal{M}_P^\alpha \Delta \mathcal{M}_Q^\beta) &= \mu_w^\varepsilon (\mathcal{M}_P^\alpha \cap \mathcal{M}_Q^\beta) + \mu_w^\varepsilon (\mathcal{M}_P^\alpha \setminus \mathcal{M}_Q^\beta) \\ &+ \mu_w^\varepsilon (\mathcal{M}_Q^\beta \setminus \mathcal{M}_P^\alpha) \\ &= \mu_w^\varepsilon (\mathcal{M}_P^\alpha) \mu_w^\varepsilon (\mathcal{M}_Q^\beta) + \mu_w^\varepsilon (\mathcal{M}_P^\alpha) \mu_w^\varepsilon (\mathcal{M}_Q^\beta) \\ &+ \mu_w^\varepsilon (\mathcal{M}_P^\alpha) \mu_w^\varepsilon (\mathcal{M}_Q^\beta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \text{Sp}(WP) \text{Sp}(W[1-Q]) + \text{Sp}(WQ) \text{Sp}(W[1-P]) \\
 &= \text{Sp}\{W(P+Q)\} - 2 \text{Sp}(WP) \text{Sp}(WQ)
 \end{aligned}$$

und daraus ergibt sich

(4.13)

$$\lim_{|t_1-t_2| \rightarrow 0} \mu_W^\varepsilon \left(\mathcal{M}_{u_{t_1}^+ P u_{t_1}}^{\bar{u}_{t_1}(\alpha)} \Delta \mathcal{M}_{u_{t_2}^+ P u_{t_2}}^{\bar{u}_{t_2}(\alpha)} \right) = 2 \text{Sp}(W u_{t_1}^+ P u_{t_1}) - 2 \text{Sp}(W u_{t_2}^+ P u_{t_2})^2$$

Offensichtlich ist aber die rechte Seite von Gl (4.13) im allgemeinen von Null verschieden und folglich sind die Forderungen von Axiom [4] in unserem Modell aus Satz (2) nicht erfüllt. Das bedeutet, daß Axiom [4] von den Axiomen [0] bis [3] unabhängig ist.

Um die Verträglichkeit der Axiome [0] bis [4] nachzuweisen, müssen wir also ein neues Modell konstruieren. Man könnte daran denken, das Modell aus Satz (2) durch Forderungen an die zwei-dimensionalen Randmaße

$$\mu_W^\varepsilon(\mathcal{M}_P^\alpha \cap \mathcal{M}_Q^\beta) \quad \text{soweit abzuändern, daß Gl (4.12) stets erfüllt ist.}$$

Dieser Weg stößt aber auf Schwierigkeiten. Erstens erweist sich ein modellunabhängiger Existenzbeweis für Produktmaße mit fest vorgegebenen eindimensionalen und weitgehend vorgeschriebenen zweidimensionalen Randmaßen als ausgesprochen schwierig. Zweitens besteht (unabhängig von einer Lösung des ersten Problems) die Schwierigkeit, in einem Modell mit dem Meßraum $(\prod_{\alpha} \text{Sp} T(\mathcal{K}_{\alpha}), \otimes_{\alpha} \mathcal{L}_{\alpha})$ - in dem jedem Zeitpunkt t eine neue Achse $\bar{u}_t(\alpha)$ entspricht und in dem folglich $\mathcal{M}_{u_{t_1}^+ P u_{t_1}}^{\bar{u}_{t_1}(\alpha)}$ und $\mathcal{M}_{u_{t_2}^+ P u_{t_2}}^{\bar{u}_{t_2}(\alpha)}$ (unabhängig von der Zeitdifferenz t_1-t_2) eindimensionale Zylindermengen mit orthogonalen Basisräumen darstellen - eine stetige "Phasenbahn" $X(t) = T_t X$ für fast alle Mikrozustände x zu definieren.

Aus diesen Gründen erweist es sich als zweckmäßiger, ein ganz neues Modell zu konstruieren, das speziell auf eine einfache Realisierung der Forderungen aus Axiom [4] hin konzipiert ist. Bei der Konstruktion des neuen Modells gehen wir von der Äquivalenzrelation

$$\alpha \approx \beta \quad : \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha = (E_{\lambda}), \beta = (F_S) \quad \text{und es existiert eine unitäre Trans-} \\ \text{formation } U \text{ mit } U E_{\lambda} = F_{\varphi(\lambda)} U \quad \text{für alle } \lambda; \varphi \text{ invertierbar.} \end{array} \right.$$

in der Menge $\bigwedge$ aller Spektralscharen (E_{λ}) in $\mathcal{K}$ aus. Diese Äquivalenzrelation induziert eine Klasseneinteilung in $\bigwedge$; und wir bezeichnen mit $\langle \alpha \rangle$ die Indexklasse, die α enthält, und mit $\bigwedge^*$ die Menge aller Indexklassen.

Bedeutet $\mathbb{C}$ den komplexen euklidischen Raum von gleicher Dimension wie der Hilbertraum des betrachteten physikalischen Systems und ist

$\mathcal{E} = \{x \in \mathbb{C} \mid 0 < \|x\| \leq 1\}$ die "gelochte Einheitskugel" aus $\mathbb{C}$, so ordnen wir nun jedem Element $\langle \alpha \rangle \in \Lambda^*$ eine gelochte Einheitskugel $\mathcal{E}_{\langle \alpha \rangle}$ zu. In $\mathbb{C}$ bzw. $\mathcal{E}$ und $\mathcal{H}$ führen wir nun einige Bezeichnungen ein und erinnern gleichzeitig an einige elementare Tatsachen aus der analytischen Geometrie, die wir zur Konstruktion unseres Modells verwenden:

- (1) Jedem "Punkt" $x \in \mathcal{E}$ wird durch $|x\rangle = \overrightarrow{0x}$ genau ein "Vektor" $|x\rangle$ des Hilbertraumes $\mathcal{H}$ mit $0 < \langle x|x \rangle \leq 1$ zugeordnet (und umgekehrt).
- (2) Jedem Element $x \in \mathcal{E}$ wird durch die Vorschrift $P(x) = \frac{|x\rangle\langle x|}{\langle x|x \rangle}$ eindeutig ein elementarer Projektionsoperator in $\mathcal{H}$ zugeordnet.
- (3) Zu jedem Element $x \in \mathcal{E}$ existiert genau ein eindimensionaler Teilraum $L(x) \subset \mathcal{E}$, der x enthält.
- (4) Durch die eindeutigen Abbildungen $P(x)$ und $L(x)$ wird eine bijektive Abbildung $L(P)$ der Menge aller elementaren Projektionsoperatoren in $\mathcal{H}$ auf die Menge aller eindimensionalen Teilräume aus $\mathcal{E}$ induziert, wobei folgende Beziehungen gelten

$$z \in L(x) \iff |z\rangle = P(x)|z\rangle \iff |z\rangle \in P(x)\mathcal{H} \iff |z\rangle = c|x\rangle \text{ mit } 0 < |c| \leq 1$$

Mit Hilfe dieser Tatsachen können wir nun jeder beliebigen Proposition R^α eine Menge $\mathcal{R}_R^\alpha$ in $\mathcal{E}_{\langle \alpha \rangle}$ zuordnen: Ist F_λ ein Projektionsoperator aus der Spektralschar α , so definieren wir

$$\mathcal{R}_{F_\lambda}^\alpha = \{x \in \mathcal{E}_{\langle \alpha \rangle} \mid 0 < \|x\|^2 \leq \text{Sp}(F_\lambda P(x))\} \quad (4.14)$$

Ist R^α eine beliebige Proposition, so läßt sich R in der Form $R = F_\mu - F_\nu$ mit $\mu \geq \nu$ und F_μ, F_ν aus $\alpha = (F_\lambda)$ darstellen, und wir definieren

$$\mathcal{R}_R^\alpha = \{x \in \mathcal{E}_{\langle \alpha \rangle} \mid \text{Sp}(F_\nu P(x)) < \|x\|^2 \leq \text{Sp}(F_\mu P(x))\} \quad (4.15)$$

Obwohl die Darstellung $R = F_\mu - F_\nu$ im allgemeinen mehrdeutig ist, überlegt man sich doch leicht, daß durch Gl (4.15) jeder Proposition R^α genau eine eindeutig bestimmte Menge $\mathcal{R}_R^\alpha$ zugeordnet wird.

Wir bezeichnen nun mit $\mathcal{L}_{\langle \beta \rangle}$ die von der Gesamtheit aller Mengen $\mathcal{R}_R^\alpha$ (mit $\alpha \in \langle \beta \rangle$) erzeugte σ -Algebra und ordnen jedem elementaren Projektionsoperator Q eine Mengenfunktion auf dem Meßraum $(\mathcal{E}_{\langle \omega \rangle}, \mathcal{L}_{\langle \omega \rangle})$ zu durch die Vorschrift

$$\mathcal{V}_Q^{\langle \alpha \rangle}(M) = \frac{1}{\pi} \tilde{m}^2(M \cap L(Q)) \quad (4.16)$$

Hierbei bedeutet $\tilde{m}^2$ das zweidimensionale Lebesgue-Maß auf der (als Gaußebene aufgefaßten) komplexen "Geraden" $L(Q)$. Es gilt

$$\mathcal{R}_R^\alpha \cap L(Q) = \{x \in L(Q) \mid \text{Sp}(F_\nu P(x)) < \|x\|^2 \leq \text{Sp}(F_\mu P(x))\} =$$

$$= \{x \in L(Q) \mid Sp(F_v Q) < \|x\|^2 \leq Sp(F_\mu Q)\}$$

$\mathcal{M}_R \cap L(Q)$ ist also ein Kreisring in $L(Q)$ und damit trivialerweise $\mathcal{M}^2$ -meßbar. Bekanntlich ist auch die von allen konzentrischen Kreisringen im Einheitskreis erzeugte σ -Algebra $\mathcal{M}^2$ -meßbar. Daher stellt

$\mathcal{V}_Q^{(\alpha)}$ eine auf ganz $\mathcal{L}_{(\alpha)}$ eindeutig definierte Mengenfunktion dar. Und aus der Tatsache, daß $\mathcal{M}^2$ ein normiertes Maß auf den Borelmengen des Einheitskreises darstellt, folgt unmittelbar, daß auch $\mathcal{V}_Q^{(\alpha)}$ ein normiertes Maß auf $(\mathcal{L}_{(\alpha)}, \mathcal{L}_{(\alpha)})$ darstellt.

Als nächstes konstruieren wir zu jedem Makrozustand W^E ein normiertes Maß $\mathcal{V}_{W^E}^{(\alpha)}$ auf $(\mathcal{L}_{(\alpha)}, \mathcal{L}_{(\alpha)})$. Dazu definieren wir zunächst zu jedem Makrozustand W^E eine "Standardzerlegung" des zugehörigen Zustandsoperators W : Bekanntlich besitzt jeder Zustandsoperator W eine eindeutig bestimmte Zerlegung in Projektionsoperatoren $W = \sum \lambda_\nu R_\nu$ mit

$\sum_\nu \lambda_\nu Sp(R_\nu) = 1$; $\lambda_\nu > 0$; $\mu + \nu \Rightarrow \lambda_\mu + \lambda_\nu$. Darüber hinaus besitzt der (zu dem Makrozustand W^E mit der Zerlegung der Einheit $1^E = \sum_{i \in J} S_i$ gehörige Zustandsoperator W eine ebenfalls eindeutig bestimmte, verfeinerte Zerlegung $W = \sum_{i \in J} \lambda_i S_i$, in der die λ_i nun allerdings nur noch den Bedingungen $\lambda_i > 0$ und $\sum \lambda_i Sp(S_i) = 1$ genügen.

Wir konstruieren nun zu jedem Projektionsoperator R noch eine willkürliche (aber eindeutig bestimmte [4.5]) Zerlegung in elementare Projektionsoperatoren $R = \sum_{\mu=1}^{dim R} G_\mu$ und erhalten so schließlich zu jedem Makrozustand W^E eine eindeutig bestimmte (von E abhängige) Zerlegung des Zustandsoperators W in elementare Projektionsoperatoren

$$W = \sum_{n=1}^{\sum Sp(R_\nu)} \lambda_n G_n \quad \text{mit} \quad \lambda_n > 0, \quad \sum \lambda_n = 1, \quad Sp(G_n) = 1 \quad (4.17)$$

Mit Hilfe dieser Standardzerlegung (4.17) können wir nun zu jedem Makrozustand W^E eine Mengenfunktion $\mathcal{V}_{W^E}^{(\alpha)}$ definieren

$$\mathcal{V}_{W^E}^{(\alpha)} := \sum_{n=1}^{\sum Sp(R_\nu)} \lambda_n \mathcal{V}_{G_n}^{(\alpha)} \quad (4.18)$$

Wegen $\sum \lambda_n = 1$ ist $\mathcal{V}_{W^E}^{(\alpha)}$ ebenfalls ein normiertes Maß auf dem Meßraum $(\mathcal{L}_{(\alpha)}, \mathcal{L}_{(\alpha)})$.

Damit haben wir zu jeder Indexklasse $\langle \alpha \rangle \in \Lambda^*$ und zu jedem Makrozustand W^E einen Wahrscheinlichkeitsraum $(\mathcal{L}_{\langle \alpha \rangle}, \mathcal{L}_{\langle \alpha \rangle}, \mathcal{V}_{W^E}^{(\alpha)})$ konstruiert. Den gesuchten Zustandsraum mit den Propositionen-Trägermengen $\mathcal{M}_P^*$ definieren wir nun ähnlich wie in Satz (2) durch Bildung des direkten Produktes - nun aber über alle Indexklassen $\langle \alpha \rangle$ aus Λ^* .

Definition (a) Als Zustandsraum unseres Modells definieren wir den Meßraum

$$(\Omega, \mathcal{L}) := \bigotimes_{\alpha \in \Lambda^*} (\mathcal{L}_{\langle \alpha \rangle}, \mathcal{L}_{\langle \alpha \rangle}) = \left(\prod_{\alpha \in \Lambda^*} \mathcal{L}_{\langle \alpha \rangle}, \bigotimes_{\alpha \in \Lambda^*} \mathcal{L}_{\langle \alpha \rangle} \right) \quad (4.19)$$

(b) Jedem Makrozustand W^ε ordnen wir das normierte Maß

$$\mu_W^\varepsilon := \bigotimes_{\alpha \in \Lambda^*} \nu_{W^\varepsilon}^{\langle \alpha \rangle} \quad \text{auf } (\Omega, \mathcal{L}) \text{ zu.} \quad (4.20)$$

(c) Jeder Proposition P^α ordnen wir die Observablenwertfunktion $\circ P^\alpha = \mathcal{U}[\mathcal{M}_P^\alpha]$ mit der Trägermenge $\mathcal{M}_P^\alpha = \mathcal{M}_P^\alpha \times \prod_{\langle \beta \rangle \neq \langle \alpha \rangle} \mathcal{L}_{\langle \beta \rangle}$ zu. (4.21)

(d) Jeder Observablen A^α mit der Spektraldarstellung $A = \int a(\lambda) dF_\lambda$ bezüglich der Spektralschar $\alpha = (F_\lambda)$ ordnen wir die Observablenwertfunktion $\circ A^\alpha = \int a(\lambda) d \circ F_\lambda^\alpha$ zu. (4.22)

Die "Punkte" unseres Zustandsraumes $\Omega = \prod_{\alpha \in \Lambda^*} \mathcal{L}_{\langle \alpha \rangle}$ sind also eindeutige Abbildungen $\Lambda^* \xrightarrow{x} \mathcal{L}$ der Menge Λ^* auf die gelochte Einheitskugel $\mathcal{L}$. In diesem Zustandsraum müssen wir nun - neben einer Metrik - noch die "Zustandsströmung" T konstruieren, auf die wir ja die zeitliche Änderung der Ensembles bzw. Makrozustände zurückführen wollen.

Sei U ein beliebiger unitärer Operator im Hilbertraum des betrachteten physikalischen Systems; dann ordnen wir U eine Punkttransformation $\tilde{U}_{\langle \alpha \rangle}$ von $\mathcal{L}_{\langle \alpha \rangle}$ auf sich zu durch die Vorschrift

$$\tilde{U}_{\langle \alpha \rangle} x = y \iff U|x\rangle = |y\rangle \quad \text{mit } x, y \in \mathcal{L}_{\langle \alpha \rangle}; \quad |x\rangle, |y\rangle \in \mathcal{H} \quad (4.23)$$

Mit Hilfe dieser Transformationen $\tilde{U}_{\langle \alpha \rangle}$ können wir nun die gesuchte Zustandsströmung definieren.

Definition Jeder unitären Transformation U in $\mathcal{H}$ ordnen wir durch die Vorschrift $T_x = T\{x(\langle \alpha \rangle)\} = \{\tilde{U}_{\langle \alpha \rangle} x(\langle \alpha \rangle)\} = \{y(\langle \alpha \rangle)\} = y$ (4.24) eine eindeutig bestimmte Punkttransformation von Ω auf sich zu.

Definition Ist $\|\dots\|$ die Metrik im separablen euklidischen Raum $\mathcal{C}$ (bzw. in $\mathcal{L}$), so definieren wir in Ω die Metrik

$$d(x, y) := \sup_{\alpha \in \Lambda^*} \|x(\langle \alpha \rangle) - y(\langle \alpha \rangle)\| \quad (4.25)$$

Für die oben definierten Größen $(\Omega, \mathcal{L}, \mu_W^\varepsilon)$, $\circ A^\alpha$, T und $d(x, y)$ unseres Modells gilt nun folgender

Satz (4) (a) Jeder Observablen A^α ist durch Gl (4.22) eindeutig eine surjektive Abbildung $\Omega \xrightarrow{\circ A^\alpha} \text{SpT}(A)$ des Raumes Ω auf das Spektrum von A zugeordnet.

(b) Alle Funktionen $\circ A^\alpha$ sind $(\Omega, \mathcal{L})$ -meßbar und genügen der Beziehung $f(\circ A^\alpha) = \circ f(A)^\alpha$ für alle borelmeßbaren Funktionen f .

(c) Es gilt $\int_{\Omega} {}^{\circ}A^{\alpha}(x) d\mu_w^{\varepsilon} = \zeta_p(AW)$ für alle Makrozustände W^{ε} und alle Observablen A^{α} .

(d) Zu jedem beliebigen unitären Operator U aus $\mathcal{H}$ stellt die durch Gl (4.24) definierte Punkttransformation T eine bijektive, stetige und in beiden Richtungen $(\Omega, \mathcal{Q})$ -meßbare Abbildung des Raumes Ω auf sich dar; darüber hinaus gelten die Beziehungen

$$({}^{\circ}(U^{\dagger}AU))^{{}^{\circ}u(x)} = {}^{\circ}A^{\alpha}(Tx) \quad \forall x, \forall A^{\alpha} \quad (4.26)$$

$$\mu_{u_w u^{\dagger}}^{{}^{\circ}u(x)}(M) = \mu_w^{\varepsilon}(T^{-1}M) \quad \forall M \in \mathcal{Q}, \forall W^{\varepsilon} \quad (4.27)$$

(e) Ist $\{U_t\}$ eine beliebige einparametrische kontinuierliche Gruppe unitärer Transformationen in $\mathcal{H}$, so bildet die zugehörige Menge $\{T_t\}$ von Punkttransformationen in Ω ebenfalls eine einparametrische kontinuierliche Gruppe mit den Eigenschaften

$$\lim_{|t_1 - t_2| \rightarrow 0} d(T_{t_1}x, T_{t_2}x) = 0 \quad \forall x \quad (4.28)$$

$$\lim_{|t_1 - t_2| \rightarrow 0} \mu_w^{\varepsilon}(T_{t_1}^{-1}M \Delta T_{t_2}^{-1}M) = 0 \quad (4.29)$$

für alle Makrozustände und alle Elemente M aus der (endlichen) Algebra $\mathcal{F}$.

Aus diesem Satz ergibt sich unmittelbar das für uns entscheidende

K O R R O L L A R Die Axiome [0] bis [4] sind verträglich; insbesondere bilden die (in den Gl'n (4.19) bis (4.25) definierten) mathematischen Größen $(\Omega, \mathcal{Q}, \mu_w^{\varepsilon})$, ${}^{\circ}A^{\alpha}$, T und $d(x, y)$ ein Modell für diese Gruppe von Axiomen.

4.3 Untersuchung des vollen Axiomensystems

Nachdem wir in Satz (4) die Verträglichkeit der Axiome [1] bis [4] nachgewiesen haben, bleibt zum Abschluß dieses Kapitels noch die Verträglichkeit aller Axiome aus § 3.2 sowie die Unabhängigkeit von Axiom [5] von den übrigen Axiomen zu untersuchen.

Um den zweiten Punkt zu klären, prüfen wir zunächst nach, ob Axiom in den bisher betrachteten Modellen zur VWSTh bereits erfüllt ist. Spezialisieren wir Gl (3.28) auf den einfachen Fall¹⁴⁾

$$W_1 = |\Psi_1\rangle\langle\Psi_1| \quad \text{und} \quad |\Psi_1\rangle = \sum_i \langle a_i|\Psi\rangle |a_i\rangle |\Phi_{a_i}\rangle$$

$$A^\alpha = (\hat{A} \times 1)^\alpha \text{ mit } A = \sum a_i P_{a_i} \text{ und } P_{a_i} = |a_i\rangle\langle a_i|$$

$$B^\beta = (\hat{P} \times 1)^\beta \text{ mit } P^2 = P \quad (4.30)$$

so ist $W_2 = |a_k\rangle\langle a_k| \times |\Phi_{a_k}\rangle\langle\Phi_{a_k}|$ und für das Modell aus Satz (2) ergibt sich

$$\int B^\beta \mathcal{U}[\circ(A \times 1)^\alpha = a_k] d\mu_{W_1}^\varepsilon = \mu_{W_1}^\varepsilon(\mathcal{M}_{P \times 1}^\beta \cap \mathcal{M}_{P_{a_k} \times 1}^\alpha) =$$

$$= \mu_{W_1}^\varepsilon(\mathcal{M}_{P \times 1}^\beta) \mu_{W_1}^\varepsilon(\mathcal{M}_{P_{a_k} \times 1}^\alpha) = \langle\langle \Psi_1 | P \times 1 | \Psi_1 \rangle\rangle \langle\langle \Psi_1 | P_{a_k} \times 1 | \Psi_1 \rangle\rangle$$

$$= |\langle \Psi | a_k \rangle|^2 \sum_i |\langle \Psi | a_i \rangle|^2 \langle a_i | P | a_i \rangle \quad (4.31)$$

$$\int B^\beta d\mu_{W_2}^\varepsilon \cdot \int \mathcal{U}[\circ(A \times 1)^\alpha = a_k] d\mu_{W_1}^\varepsilon = \mu_{W_2}^\varepsilon(\mathcal{M}_{P \times 1}^\beta) \mu_{W_1}^\varepsilon(\mathcal{M}_{P_{a_k} \times 1}^\alpha)$$

$$= \langle\langle a_k \Phi_{a_k} | P \times 1 | a_k \Phi_{a_k} \rangle\rangle \langle\langle \Psi_1 | P_{a_k} \times 1 | \Psi_1 \rangle\rangle = |\langle \Psi | a_k \rangle|^2 \langle a_k | P | a_k \rangle \quad (4.32)$$

Das bedeutet, daß Axiom [5] in unserem ersten Modell nicht gilt. Nun haben wir aber in (4.31) und (4.32) als einzige Eigenschaft des betrachteten Modells die Beziehung $\mu_w^\varepsilon(\mathcal{M}_R^\alpha \cap \mathcal{M}_S^\beta) = \mu_w^\varepsilon(\mathcal{M}_R^\alpha) \cdot \mu_w^\varepsilon(\mathcal{M}_S^\beta)$ benutzt. Folglich gilt die obige Überlegung für alle Modelle mit einem Zustandsraum der Struktur $(\Omega, \mathcal{L}, \mu_w^\varepsilon) = \bigotimes (\Omega_i, \mathcal{L}_i, \nu_{w_i}^\varepsilon)$

und

$$\{x | \circ P^\alpha = 1\} = \mathcal{M}_P^\alpha = \mathcal{M}_P^\alpha \times \prod_{j \neq i(\alpha)} \Omega_j, \quad \mathcal{M}_P^\alpha \in \mathcal{L}_{i(\alpha)} \quad (4.33)$$

Insbesondere ist Axiom [5] also auch in dem Modell von Satz (4) verletzt. Um die Verträglichkeit der Axiome [0] bis [5] nachzuweisen, müßten wir daher ein neues Modell konstruieren, das nicht die einfache Struktur (4.33) besitzt. Es läßt sich aber leicht zeigen, daß überhaupt kein Modell zu den Axiomen [0] bis [5] existiert.

Angenommen, es gäbe ein Modell, in dem die Axiome [0] bis [3] und [5] gelten. Dann addieren wir die Ausdrücke auf der linken bzw. auf der rechten Seite von Gl (3.26) jeweils über alle Werte von k und vergleichen.

Die Addition der linken Seiten ergibt [4.6]

$$\sum_k \int {}^0 B^{\beta} \text{ch} [({}^0(A \times 1))^{\alpha} = a_k] d\mu_{W_1}^{\epsilon} = \int {}^0 B^{\beta} \sum_k \text{ch} [({}^0(A \times 1))^{\alpha} = a_k] d\mu_{W_1}^{\epsilon}$$

$$= \int {}^0 B^{\beta}(x) d\mu_{W_1}^{\epsilon} = Sp_3({}^3 B {}^3 W_1)$$

dagegen ergibt die Addition der rechten Seiten

$$\sum_k \int {}^0 B^{\beta}(x) d\mu_{W_2}^{\epsilon} \cdot \int \text{ch} [({}^0(A \times 1))^{\alpha} = a_k] d\mu_{W_1}^{\epsilon}$$

$$= \sum_k Sp_3({}^3 B {}^3 W_2) Sp_3({}^3 W_1 [{}^1 P_{a_k} \times 1])$$

Nun gilt aber¹⁴⁾

$${}^3 W_1 = \sum_{i,j} P_{a_i} {}^1 W P_{a_j} {}^2 W [i,j] \quad , \quad Sp_3({}^3 W_1 [{}^1 P_{a_k} \times 1]) = Sp_1({}^1 W P_{a_k})$$

$${}^3 W_2 = \frac{P_{a_k} {}^1 W P_{a_k}}{Sp_1(P_{a_k} {}^1 W)} \cdot {}^2 W [k,k]$$

und damit erhalten wir

$$\sum_k \int {}^0 B^{\beta} \text{ch} [({}^0(A \times 1))^{\alpha} = a_k] d\mu_{W_1}^{\epsilon} = \sum_{i,j} Sp_3({}^3 B \cdot {}^1 P_a {}^1 W P_a {}^2 W [i,j]) \quad (4.34)$$

$$\sum_k \int {}^0 B^{\beta} d\mu_{W_2}^{\epsilon} \cdot \int \text{ch} [({}^0(A \times 1))^{\alpha} = a] d\mu_{W_1}^{\epsilon} = \sum_k Sp_3({}^3 B {}^1 P_{a_k} {}^1 W P_{a_k} {}^2 W [k,k]) \quad (4.35)$$

Offensichtlich sind die Ausdrücke (4.34) und (4.35) im allgemeinen verschieden; und das bedeutet, daß Gl (3.28) nicht für beliebige Observable $\check{B}^{\beta}$ gilt. Damit erhalten wir folgendes Resultat

S a t z 5 (a) Die Axiome 0 1 2 3 und 5 aus § 3.2 sind unverträglich.

(b) Jedes der Axiome n (für $n = 1, \dots, 5$) ist von der Gesamtheit der Axiome 0 bis n-1 unabhängig.

(Soweit Aussage (b) nicht trivial ist, finden sich die Beweise der einzelnen Teilaussagen an verschiedenen Stellen von Kapitel 4)

Bevor wir die Bedeutung dieses Resultates für das Problem einer konsistenten VWSTh diskutieren, wollen wir uns zunächst noch über den

physikalischen Grund dieses oben mehr formal aufgezeigten Widerspruches klar werden. In § 4.1 haben wir gesehen, daß jedes Ensemble (über die im ganzen Zustandsraum geltende Observablenstruktur hinaus) eine ganz bestimmte, charakteristische Observablenstruktur besitzt, die durch den definierenden Makrozustand gegeben ist. Diese Observablenstruktur kann nun offenbar durch eine Ensemblereduktion, die ja nur die Beschränkung auf ein Teilensemble darstellt, nicht wesentlich geändert werden; genauer gesagt, sie kann weder zerstört werden noch - bei einer Zerlegung in Teilensembles - in allen Teilensembles in gleicher Weise verfeinert werden. Aber gerade solche Änderungen der Observablenstruktur werden in Axiom [5] gefordert. Wir wollen uns das an zwei einfachen Beispielen klar machen. Betrachten wir etwa die Observable $B^3 = |\Psi_2\rangle\langle\Psi_2|$ mit

$$|\Psi_2\rangle = \sum_i \langle a_i | \Psi \rangle |a_i\rangle | \phi_{a_i} \rangle \quad \text{und} \quad \langle \phi | \Psi \rangle = 0$$

so ergibt sich im Fall $W_1 = |\Psi_1\rangle\langle\Psi_1|$

$$\int B^3 d\mu_{\Psi_1}^\varepsilon = \langle \Psi_1 | B | \Psi_1 \rangle = |\langle \Psi_1 | \Psi_2 \rangle|^2 = |\langle \phi | \Psi \rangle|^2 = 0$$

Andererseits ergibt sich unter Verwendung von Axiom [5]

$$\begin{aligned} \int B^3 d\mu_{\Psi_1}^\varepsilon &= \sum_k \left(\int B^3 \text{ch}[\varphi(A \times 1)^\alpha = a_k] d\mu_{\Psi_1}^\varepsilon \right) = \\ &= \sum_k \left(\int B^3 d\mu_{|a_k \phi_{a_k}\rangle}^\eta \cdot \int \text{ch}[\varphi(A \times 1)^\alpha = a_k] d\mu_{\Psi_1}^\varepsilon \right) = \\ &= \sum_k |\langle \phi | a_k \rangle|^2 \langle a_k \phi_{a_k} | B | a_k \phi_{a_k} \rangle = \sum_k |\langle \phi | a_k \rangle|^2 |\langle \phi | a_k \rangle|^2 \neq 0 \quad \text{i. a.} \end{aligned}$$

In diesem Fall verlangt Axiom [5] also, daß die im Ψ_1 -Ensemble gültige Observablenrelation $B^3 = 0$ durch eine reine Zerlegung des Ψ_1 -Ensembles in Teilensembles ungültig wird.

Betrachten wir dagegen die "Interferenzobservablen" $Q_{\mu\nu}^\sigma$ mit $\mu \neq \nu$,

$Q_{\mu\nu}^\sigma = |\phi_\mu \phi_\nu\rangle\langle\phi_\nu \phi_\mu| + |\phi_\nu \phi_\mu\rangle\langle\phi_\mu \phi_\nu|$, so ergibt sich umgekehrt

$$\int Q_{\mu\nu}^\sigma d\mu_{\Psi_1}^\varepsilon = \langle \Psi_1 | Q_{\mu\nu}^\sigma | \Psi_1 \rangle \neq 0 \quad \text{i. a.}$$

aber

$$\sum_k \left(\int Q_{\mu\nu}^\sigma \text{ch}[\varphi(A \times 1)^\alpha = a_k] d\mu_{\Psi_1}^\varepsilon \right) = \sum_k \left(\int Q_{\mu\nu}^\sigma d\mu_{|a_k \phi_{a_k}\rangle}^\eta \cdot \int \text{ch}[\varphi(A \times 1)^\alpha = a_k] d\mu_{\Psi_1}^\varepsilon \right) =$$

$$= \sum_k |K\varphi|a_k\rangle|^2 \langle\langle a_k\varphi_{a_k} | Q_{\mu\nu} | a_k\varphi_{a_k} \rangle\rangle = 0$$

Hier fordert Axiom [5], daß die im Ψ_1 -Ensemble ungültige Relation $Q_{\mu\nu}^T = 0$ in sämtlichen Teilensembles einer bestimmten Zerlegung des Ψ_1 -Ensembles gelten soll. In beiden Fällen führt Axiom [5] zu Konsequenzen, die mit den Vorstellungen einer Ensembletheorie unvereinbar sind. Es ist also auch von der physikalischen Interpretation her sehr einleuchtend, daß Axiom [5] den übrigen Axiomen widerspricht.

Abschließend müssen wir uns noch darüber klar werden, was das obige Ergebnis für die vorliegende Untersuchung bedeutet. Zunächst ergibt sich aus Satz (5a) unmittelbar folgende Konsequenz: Die in der Quantenmechanik als unabhängiges Axiom eingeführte "Reduktion des Zustandsoperators" läßt sich in der VWSTh durch die (im klassischen "statistischen Überbau" der VWSTh begründete) "Ensemblereduktion" nicht äquivalent ersetzen. Damit hat sich die Hoffnung von Wiener und Siegel, die in der Theorie des quantentheoretischen Meßprozesses liegende Problematik lasse sich in einer ensembletheoretischen, deterministischen Formulierung der Quantentheorie in einfacher Weise auflösen, als unbegründet erwiesen.

Will man unbedingt an einer ensembletheoretischen Formulierung der Quantentheorie festhalten, so bleiben u.E. nur zwei Möglichkeiten:

(a) Man kann den Geltungsbereich der Quantenmechanik (insbesondere etwa die Aussagen der Quantenmechanik über die zeitliche Entwicklung des Zustandsoperators) "nach oben" begrenzen. In diesem Fall beschränkt sich die Theorie des Meßprozesses auf die Behandlung der Wechselwirkung 'Objekt - Instrument' als äußere Störung spezieller Art, deren Besonderheit durch zusätzliche Annahmen in geeigneter Weise berücksichtigt werden muß.

(b) Will man die Gültigkeit der Quantenmechanik nicht einschränken, so bleibt im Rahmen einer VWSTh nur die Möglichkeit, die Ensemblereduktion, als die exakte, "eigentliche" Beschreibung des Meßprozesses anzusehen. In diesem Fall stellt die aus der Quantenmechanik bekannte "Reduktion des Zustandsoperators" nur eine Näherungsformel für das reduzierte Ensemble dar und steht demzufolge - unabhängig von der Güte der Näherung - nicht mehr auf gleicher Stufe mit der unitären Entwicklung des Zustandsoperators.

In keinem der beiden Fälle würde die VWSTh aber den Geltungsbereich bzw. die Geschlossenheit der orthodoxen Quantenmechanik (etwa in der von Neumann'schen Fassung) erreichen.

Damit wollen wir die Diskussion des Axiomensystems aus § 3.2 abschließen. Zusammenfassend können wir sagen, daß eine konsistente, ensembletheoretische Formulierung der Quantentheorie, wie wir sie in § 2.1 und § 3.2 näher charakterisiert haben, nicht möglich ist.

5. Tragweite und Bedeutung der Ergebnisse aus Kapitel 3 und 4

5.1 Abhängigkeit der Ergebnisse der Kapitel 3 und 4 von einer sinnvollen Abschwächung des Axiomensystems

In den beiden vorangegangenen Kapiteln haben wir die Möglichkeit einer VWSTh untersucht. In Anlehnung an Wiener und Siegel haben wir dabei sehr starke Annahmen über die Menge der Observablen und Makrozustände eines physikalischen Systems gemacht, um die mathematischen Überlegungen zu vereinfachen (und nicht in jedem Satz eigene, minimale Voraussetzungen über diesen Punkt formulieren zu müssen). Diese starken Annahmen (in Axiom $\boxed{1}$ von § 3.2) sind aber weder typisch noch wesentlich für die VWSTh, und darüber hinaus sind sie in manchen Fällen sogar unzulässig¹⁵⁾. Wir wollen uns daher nachträglich überlegen, inwieweit die wesentlichen Ergebnisse der Kapitel 3 und 4 von diesen Voraussetzungen abhängen und gegebenenfalls abgeschwächt werden müssen.

Offenbar werden Aussagen über die Verträglichkeit bestimmter Axiome bzw. über die Existenz bestimmter Modelle von einer reinen Abschwächung der Axiome nicht betroffen. Folglich sind die in den Sätzen (2), (4) und (2.3) formulierten Resultate von einer Abschwächung von Axiom $\boxed{1}$ unabhängig und gelten unverändert. Dagegen zeigen die Beweise der übrigen Sätze, daß ihre Ergebnisse sehr wohl von Umfang und Struktur der Mengen der Observablen und Makrozustände abhängen. Wir werden daher die Sätze (2.1) und (5) noch einmal mit minimalen Voraussetzungen formulieren [5.1]. Zunächst fassen wir die beiden Sätzen gemeinsamen (minimalen) Voraussetzungen zu einem neuen, stark reduzierten Axiomensystem zusammen. Dieses reduzierte Axiomensystem beschränkt sich auf Annahmen über Umfang und Struktur der Mengen der Zustandseigenschaften und Makrozustände sowie der ihnen zugeordneten Indikatorfunktionen und Maße im Zustandsraum und entspricht damit den Axiomen $\boxed{1}$, $\boxed{2}$ und $\boxed{3}$ aus § 3.2 [5.2]. Auf Grund

dieser Beschränkung (auf minimale Forderungen an die Menge der Zustandseigenschaften und Makrozustände) eignet sich das neue Axiomensystem auch besonders gut dazu, unsere Annahmen mit denen anderer Arbeiten über das Problem von VPTh'en zu vergleichen.

Im Rahmen des reduzierten Axiomensystems charakterisieren wir also ein quantentheoretisches System durch eine Menge Σ von Zustandseigenschaften und eine Menge Θ von Makrozuständen, über die wir folgende Annahmen machen

Axiom (A) (a) Σ enthält die "unmögliche" Zustandseigenschaft Φ und die "triviale" Zustandseigenschaft I .

(b) Jedem physikalischen System ist ein komplexer separabler Hilbertraum $\mathcal{H}$ mit folgenden Eigenschaften zugeordnet:

(b 1) Es existiert eine injektive Abbildung σ der Menge $\Sigma_\sigma := \Sigma \setminus \{\Phi, I\}$ in die Menge aller Paare (P, α) , bestehend aus einer Spektralschar α aus $\mathcal{H}$ und einem von 0 und 1 verschiedenen Projektionsoperator P aus der von α erzeugten Operatoralgebra. Die Abbildung σ läßt sich nun sinnvoll erweitern, indem wir der Zustandseigenschaft Φ alle Paare $(0, \alpha)$ und der Zustandseigenschaft I alle Paare $(1, \alpha)$ zuordnen.

(b 2) Es existiert eine injektive Abbildung ν der Menge Θ in die Menge aller Paare (W, ε) , bestehend aus einer Zerlegung der Einheit ε aus $\mathcal{H}$ und einem positiv semidefiniten, normierten selbstadjungierten Operator W ($\neq 1/\dim \mathcal{H}$) aus der von ε erzeugten Operatoralgebra.

Im Hinblick auf Axiom (A) bezeichnen wir die Propositionen $\sigma^{-1}(P, \alpha)$ aus Σ_σ mit P^α und die Makrozustände $\nu^{-1}(W, \varepsilon)$ aus Θ mit W^ε .

In Σ_σ existieren offensichtlich die Ordnungsrelation $P^\alpha \leq Q^\beta : \Leftrightarrow$

$\alpha = \beta$ und $P \leq Q$, die Verträglichkeitsrelation $P^\alpha \sim Q^\beta : \Leftrightarrow \alpha = \beta$ und die Orthokomplementrelation $P^\alpha = (Q^\beta)^\perp : \Leftrightarrow \alpha = \beta$ und $P = 1 - Q$.

Die Verträglichkeitsrelation $\sim$ erzeugt in Σ_σ eine Einteilung in Äquivalenzklassen verträglicher Propositionen. Auf Grund von Axiom (A)(b 1) lassen sich die drei Relationen folgendermaßen auf ganz Σ erweitern:

$$\Phi \leq P^\alpha \leq I, \quad \Phi \sim P^\alpha, \quad I \sim P^\alpha \quad (\forall P^\alpha); \quad \Phi^\perp = I, \quad I^\perp = \Phi$$

Über Umfang und Struktur von Σ machen wir folgende Annahmen, die nach der Diskussion des neuen Observablenbegriffes der VWSTh in § 3.1 unmittelbar einleuchten:

Axiom (B) (a) Jede vollständige Menge $\mathcal{L}^\alpha = \{x \in \Sigma \mid x \sim P^\alpha\}$

verträglicher Elemente aus Σ bildet eine Boolesche Algebra.

(b) Σ enthält mindestens zwei unverträgliche Propositionen.

Aus den Axiomen (A) und (E) ergibt sich unmittelbar

Korollar (5.3) Σ bildet keinen Verband sondern "nur" eine semi-boolesche Algebra (E) mit dem trivialen Zentrum $\{\emptyset, I\}$. [5.3]

In letzten Axiom des reduzierten Axiomensystems führen wir den für die VWSTh charakteristischen Zustandsraum ein und machen eine Annahme über den Umfang von (H).

Axiom (C) Jedem physikalischen System ist ein metrischer Raum Ω und eine σ -Algebra $\mathcal{L}$ von Teilmengen aus Ω mit folgenden Eigenschaften zugeordnet:

- (a) Es existiert eine injektive Abbildung $\tilde{\epsilon}$ der Menge Σ in $\mathcal{L}$ mit $\tilde{\epsilon}(\emptyset) = \emptyset, \tilde{\epsilon}(I) = \Omega$.
- (b) Die Menge $\mathcal{P} = \{M \in \mathcal{L} \mid \tilde{\epsilon}^{-1}(M) \in \Sigma\}$ bildet eine zu Σ isomorphe semiboolsche Mengenalgebra.
- (c) Jedem Makrozustand W^ϵ aus (H) ist eindeutig ein normiertes Maß μ_W^ϵ auf $(\Omega, \mathcal{L})$ zugeordnet.
- (d) (H) ist so umfangreich, daß aus $\mu_W^\epsilon(M) = 0$ für $M \in \mathcal{P}$ und alle W^ϵ aus (H) folgt: $M = \emptyset$.

Zum besseren Verständnis der obigen Axiome leiten wir in Korollar (5.2) noch einige einfache Folgerungen her. Diese Folgerungen formulieren wir bewußt in Anlehnung an Axiome anderer Autoren über die Mengen Σ und (H) und die Abbildungen μ und $\tilde{\epsilon}$, so daß sich unsere Annahmen unmittelbar mit denen anderer Autoren vergleichen lassen [5.4].

Korollar (5.2) (a) Durch die Vorschrift $E(a) = \mu_W^\epsilon(\tilde{\epsilon}a)$ wird jedem Makrozustand aus (H) eine Zustandsfunktion E auf Σ zugeordnet mit folgenden Eigenschaften:

- (1) $0 \leq E(a) \leq 1$
- (2) $E(\emptyset) = 0, E(I) = 1$
- (3) $a \sim b \Rightarrow E(a) + E(b) = E(a \cup b) + E(a \cap b)$
- (4') Die Aussagen $E(a) = E(b) = 1 \Rightarrow E(a \cap b) = 1$ für $a, b \in \Sigma$ und $[\mu_W \cap \tilde{\epsilon}(b) = \tilde{\epsilon}(a \cap b)] \wedge [\tilde{\epsilon}(a \cap \tilde{\epsilon}(b)) \neq \emptyset \Rightarrow \tilde{\epsilon}(a \cap b) \neq \emptyset]$ sind in der VWSTh beide falsch. [5.5]

(5) Aus $a \neq \emptyset$ folgt die Existenz eines Makrozustandes mit $E(a) \neq 0$.

(b 1) $E|_{\mathcal{B}^2}$ ist eine Wahrscheinlichkeit auf der Booleschen Algebra $\mathcal{B}^2$.

(b 2) Aus $a \neq b$ folgt im allgemeinen nicht die Existenz eines Makrozustandes mit $E(a) \neq E(b)$

(c) Die Menge Θ ist nicht "voll" im Sinne von Zierler und Schlessinger²⁰⁾, d.h. aus $E(a) \leq E(b)$ für alle Makrozustände aus Θ folgt im allgemeinen nicht die Beziehung $a \leq b$.

Ausgehend von den relativ schwachen Annahmen der Axiome (A), (B) und (C) wollen wir nun die Sätze (3.2.1) und (5) neu formulieren.

Satz (3.2.1*)

Machen wir zusätzlich zu den drei Axiomen (A), (B), (C) noch die beiden Annahmen

(D) Der Hilbertraum unseres physikalischen Systems enthält einen dreidimensionalen Teilraum $\mathcal{H}_3$ mit der Eigenschaft, daß jeder elementare Projektionsoperator $P(\varphi)$ aus $\mathcal{H}_3$ in mindestens einer Proposition P^α_φ aus Σ auftritt und daß mindestens ein Paar von verträglichen Propositionen $P^\alpha_\chi, P^\beta_\psi$ in Σ enthalten ist mit $P(\chi) + P(\psi) < Q$, $Q\mathcal{H} = \mathcal{H}_3$.

(E) Für zwei beliebige Propositionen P^α und Q^β aus Σ gilt:
 $P \leq Q \Rightarrow \tilde{e}(P^\alpha) \subseteq \tilde{e}(Q^\beta) \forall x$.

so ergibt sich ein Widerspruch.

Satz (5*)

Die Axiome (A), (B) und (C) sind mit den folgenden Annahmen

(F) $\mu_w^\varepsilon(\tilde{e} P^\alpha) = Sp(WP)$ für alle $W^\varepsilon \in \Theta$, $P^\alpha \in \Sigma$.

(G) Mit $P^\alpha \in \Sigma$ und $W^\varepsilon \in \Theta$ ist auch der Makrozustand $\left(\frac{PWP}{Sp(WP)}\right)^\varepsilon$ in Θ enthalten [3.2].

(H) Fassen wir zwei physikalische Systeme "1" und "2" zu einem einzigen, dritten System zusammen, so enthält Σ_3 zu allen Paaren von Propositionen $\hat{P}^\alpha \in \Sigma_1$, $\hat{Q}^\beta \in \Sigma_2$ mindestens eine Proposition $\hat{R}^\gamma$ mit $\hat{R} = \hat{P} \times \hat{Q}$.

(J) Ist W_1^ε der Makrozustand des zusammengesetzten Systems "Objekt + P^α -Instrument" unmittelbar nach der zur Messung notwendigen Wechselwirkung zwischen Objekt und Instrument, und ist W_2^ε der Makrozustand des zusammengesetzten Systems unmittelbar nach der Messung der Eigenschaft $P^\alpha = 1$, so gilt die Beziehung

$$\mu_{W_1}^\varepsilon(\tilde{e}(P \times 1)^\alpha \wedge \tilde{e} \hat{Q}^\gamma) = \mu_{W_1}^\varepsilon(\tilde{e}(P \times 1)^\alpha) \mu_{W_2}^\varepsilon(\tilde{e} \hat{Q}^\gamma)$$

für alle Zustandseigenschaften $\overset{3}{Q}^\gamma$ aus $\sum_3$.
 nur dann verträglich, wenn die Beziehung

$$\sum_{\substack{i,j=1,2 \\ i \neq j}} S_{p_1}(\overset{1}{X} Q_i \overset{1}{W} Q_j) S_{p_2}(\overset{2}{Y} \overset{2}{W} [i,j]) = 0 \quad \text{mit } Q_1 = P, Q_2 = 1-P \quad (5.1)$$

für alle Zustandseigenschaften $\overset{1}{X}^\beta$ aus $\sum_1$ und $\overset{2}{Y}^\delta$ aus $\sum_2$ erfüllt ist.

(Die Beweise beider Sätze ergeben sich unmittelbar aus der Tatsache, daß in den Beweisen der ursprünglichen Sätze nur die oben zusammengestellten Voraussetzungen (A) bis (E) - bzw. (A) bis (C) und (F) bis (J) - verwendet wurden. Bei Gl (5.1) haben wir uns auf Zustandseigenschaften der Form $\overset{3}{Q}^\gamma = (\overset{1}{X} \times \overset{2}{Y})^\gamma$ aus $\sum_3$ beschränkt.)

In den eben formulierten Sätzen wird nun nicht mehr einfach ein Widerspruch in den Axiomen der VWSTh festgestellt (wie in den entsprechenden Sätzen von Kapitel 4), sondern es werden Bedingungen an die Mengen $\sum$ und $\textcircled{H}$ angegeben, unter denen gewisse Axiomengruppen nicht mehr verträglich sind. Um die Tragweite dieser Sätze beurteilen zu können, müssen wir daher zunächst ihre Voraussetzungen diskutieren.

Akzeptiert man die in § 3.1 eingeführte Verallgemeinerung der Observablen- und Zustandskonzeption, so sind die Annahmen (A), (B), (C), (F), (G) und (H) im Rahmen der VWSTh gut begründet und völlig unbedenklich. Annahme (D) ist zwar nicht in allen, aber mit Sicherheit doch in einigen quantentheoretischen Systemen erfüllt, z.B. in Spinsystemen mit mehr als zwei Dimensionen. Schwierig ist lediglich die Beurteilung der Beziehung (5.1), da hier die ganze Problematik einer quantentheoretischen Beschreibung der thermodynamischen Gleichgewichtszustände und der Observablenmenge von makrophysikalischen Systemen angeschnitten wird. Um Gl (5.1) zu vereinfachen, betrachten wir ein mikrophysikalisches System "1" mit "reicher" Zustands- und Observablenmenge. In diesem Fall können die ersten Faktoren der einzelnen Summanden in (5.1) so stark variieren, daß die Gültigkeit von Gl (5.1) das Verschwinden aller Terme $S_{p_2}(\overset{2}{Y} \overset{2}{W} [i,j])$ mit $i \neq j$ voraussetzt. Für den Spezialfall

$$\overset{3}{W}_1 = |\Psi_1\rangle\langle\Psi_1| \quad \text{mit} \quad |\Psi_1\rangle = \sum \langle a_i | \Psi \rangle |a_i\rangle |\Phi_{a_i}\rangle \quad \text{bedeutet das die}$$

$$\text{Forderung} \quad \langle \Phi_{a_i} | \overset{2}{Y} | \Phi_{a_j} \rangle = 0 \quad \text{für } i \neq j$$

Gl (5.1) ist also i.a. nur dann erfüllt, wenn in speziellen thermodynamischen Gleichgewichtszuständen eines makrophysikalischen Systems alle "Interferenzglieder" aller Observablen verschwinden.

Zu dieser Frage existiert eine umfangreiche Literatur, auf die wir hier

nicht eingehen können. Soviel läßt sich u.E. aber mit Sicherheit sagen: Wenn wir die Gültigkeit der Quantentheorie auch für makrophysikalische Systeme voraussetzen und die Meßinstrumente folglich als quantentheoretische Systeme betrachten, so ist Gl (5.1) sicher nicht exakt gültig, sondern stellt nur eine sehr gute Näherung dar. (Damit sind wir wieder bei der Diskussion des Meßprozesses in § 4.3 angekommen.)

Akzeptiert man die obige Beurteilung der Voraussetzungen der Sätze (3.21*) und (3*), so besagen diese Sätze, daß die für eine WSTh entscheidenden Eigenschaften (E) und (J) zu den übrigen Annahmen der Theorie in Widerspruch stehen. Die Überlegungen dieses Paragraphen berechtigen daher u.E. zu dem Urteil, daß die wesentlichen Ergebnisse der Kapitel 3 und 4 durch eine physikalisch vertretbare Abschwächung von Axiom [1] nicht beeinträchtigt werden. Damit schließen wir die Untersuchung der VWSTh ab und wenden uns im letzten Abschnitt der Arbeit dem allgemeinen Problem der Möglichkeit von Theorien mit verborgenen Parametern zu.

5.2 Diskussion der Möglichkeit konsistenter "Theorien mit verborgenen Parametern"

Um zu einer sachlichen Beurteilung der teilweise sehr kontroversen Literatur zum Problem der VPTh'en zu kommen, ist es vorteilhaft, zunächst eine Einteilung aller möglichen VPTh'en zu versuchen. Unter einer Theorie mit verborgenen Parametern verstehen wir eine Formulierung der Quantentheorie, die (1) jeden Prozeß vollständig zu analysieren gestattet, (2) jedes Resultat einer exakten Messung quantitativ aus gewissen - eventuell verborgenen - Parametern ableitet und die (3) die statistischen Gesetzmäßigkeiten von Meßergebnissen auf die statistische Verteilung der die Ergebnisse determinierenden Parameter zurückführt [5,6]. Die mathematische Formulierung und Präzisierung dieser verbalen Definition führt auf folgende Grundgleichung aller sinnvollen VPTh'en:

$$E(a) = \int a(\hat{x}, \hat{X}, \hat{i}) d\mu(\hat{x}, \hat{X}, \hat{i}) = \int a(\hat{x}, \hat{x}, \hat{X}, \hat{X}) d\mu(\hat{x}, \hat{x}, \hat{X}, \hat{X}) \quad (5.2a)$$

Hier bedeuten $\hat{x}, \hat{X}, \hat{i}$ bzw. $\hat{x}, \hat{x}, \hat{X}, \hat{X}$ die Mikro- bzw. Makrozustände von Objekt, Instrument bzw. dem zusammengesetzten System "Objekt + Instrument"; $\mu(M, \hat{x})$ bedeutet die Wahrscheinlichkeit, den Mikrozustand $\hat{x}$ in der Zustandsmenge M zu finden; $\mu(\hat{x}, \hat{x}, \hat{X}, \hat{X})$ bedeutet das Ergebnis

einer exakten Messung im Zustand $(\overset{3}{x}, \overset{3}{w})$ und $E(\alpha)$ bedeutet den Erwartungswert der Observablen α bei exakten Messungen im Makrozustand $\overset{3}{w}$. [5.7]

Diese Grundgleichung gibt uns nun zwei übersichtliche und physikalisch sinnvolle Kriterien an die Hand, um alle VPTh'en systematisch einzuordnen: Das erste und grundlegende Kriterium liegt in der Menge der Argumente $\overset{1}{x}$, $\overset{1}{w}$, von denen die Größen α und $d\mu$ tatsächlich abhängen; ein zweites Kriterium liegt in den Voraussetzungen, die über die Eigenschaften der Funktionen $E(\alpha)$, $\alpha(\overset{3}{x}, \overset{3}{w})$ und $\mu(\overset{3}{x}, \overset{3}{w})$ gemacht werden.

Bei einer Einteilung nach dem ersten Kriterium lassen sich drei Gruppen unterscheiden. Die erste Gruppe umfaßt die allgemeinsten VPTh'en, bei denen α und $d\mu$ von allen möglichen Argumenten auch wirklich abhängen. Die Bohm'sche Theorie^{5,6)} ist ein Beispiel für diese Gruppe. Eine vom Standpunkt der Erkenntnistheorie charakteristische Eigenschaft dieser Theorien liegt darin, daß hier nicht mehr von einer Messung im Sinne der klassischen Physik gesprochen werden kann. Grundsätzlich gibt ein Meßergebnis keine Auskunft mehr über den Mikrozustand des Objekts vor der Messung. Die (einzelne) Messung einer "Observablen" stellt nicht mehr eine Eigenschaft des Objekts fest, sondern realisiert nur eines von vielen (mit dem Zustand des Objekts vor der Messung verträglichen) potentiell möglichen Ergebnissen, dessen genauer Wert aber von Mikro- und Makrozustand des Gesamtsystems "Objekt + Instrument" abhängt. Diese und ähnliche - gerade vom Standpunkt der klassischen Physik aus untragbare - Eigenschaften haben aber viele Physiker zu dem Standpunkt veranlaßt, daß die Bohm'sche Theorie eher einen Rückschritt hinter die orthodoxe Quantenmechanik darstellt.

Größeres Interesse kann daher eine zweite Gruppe von VPTh'en beanspruchen, bei denen die Meßergebnisse nur noch vom Objekt abhängen. Für diese Gruppe vereinfacht sich Gl (5.2a) zu

$$E(\alpha) = \int \alpha(\overset{1}{x}, \overset{1}{w}) d\mu(\overset{1}{x}, \overset{1}{w}) \quad (5.2b)$$

Bei diesen Theorien kann man sagen, daß jede exakte Messung gewisse Eigenschaften des Objekts feststellt. Ein Beispiel für diese Gruppe von VPTh'en haben wir in der ursprünglichen Theorie von Wiener und Siegel⁷⁻⁹⁾.

Nun stellt aber eine Theorie, in der α von $\overset{1}{x}$ und $\overset{1}{w}$ abhängt, noch keine Ensembletheorie im Sinne der statistischen Physik dar, wie wir im Fall der WSTh in Kapitel 2 ausführlich erörtert haben. Insbesondere kann der Zustand eines individuellen Systems nicht unabhängig von dem Ensemble charakterisiert werden, dem das System zugerechnet wird. Daher fassen wir alle VPTh'en, die die Quantentheorie als deterministische, klassische

Ensembletheorie formulieren wollen, zu einer dritten Gruppe zusammen. Für diese Ensembletheorien vereinfacht sich Gl (5.28) nochmals zu dem Ansatz

$$E(\alpha) = \int \alpha(x) d\mu(x, W) \quad (5.2c)$$

Die in dieser Arbeit diskutierte (durch die Axiomensysteme von § 2.1, § 3.2 und § 5.1 charakterisierte) VWSTh gehört offenbar in diese dritte Gruppe. Innerhalb dieser drei großen Gruppen von VPTh'en kann man nun mit Hilfe des zweiten Kriteriums eine weitere Unterteilung vornehmen.

Die beiden eben erläuterten Kriterien ermöglichen aber nicht nur eine physikalisch sinnvolle Einteilung aller denkbaren VPTh'en, sondern ebenso eine einfache Beurteilung aller Versuche, die Unmöglichkeit konsistenter VPTh'en zu beweisen. Alle bisher veröffentlichten Untersuchungen mit diesem Ziel bauen nämlich auf einem der Ansätze (5.2) auf und verwenden das gleiche Schema: Zunächst werden auf Grund von physikalischen Vorstellungen bestimmte Voraussetzungen über die Abbildungen $\sum \xrightarrow{E} \mathbb{R}$

$\Omega_3 \times \mathbb{H}_3 \xrightarrow{\alpha} \mathbb{R}$ und $\mathcal{L}_3 \times \mathbb{H}_3 \xrightarrow{\mu} [0,1]$ gemacht; und dann wird durch formale Überlegungen nachgewiesen, daß diese Abbildungen den zugrunde gelegten Ansatz (5.2...) nicht erfüllen können (mit anderen Worten, daß die quantenmechanischen Erwartungswerte sich nicht als Mittelwerte dispersionsfreier Zustände auffassen lassen).

Allerdings gibt es neben der eben skizzierten Methode noch andere Möglichkeiten, die Konsistenz von VPTh'en zu untersuchen: Die Sätze (5) bzw. (5[#]) dieser Arbeit stellen einen (und meines Wissens den ersten) "Widerspruchsbeweis" dar, der nicht primär auf einer der Gl'n (5.2) aufbaut.

In den uns bekannten Veröffentlichungen über die Möglichkeit von VPTh'en gibt es nur ein einziges Ergebnis, das den Ansatz (5.2a) zugrunde legt und sich damit auf alle VPTh'en bezieht; dabei handelt es sich um einen Satz von Bell²¹⁾, der besagt, daß in allen denkbaren VPTh'en gewisse nichtlokale Wechselwirkungen auftreten, die für die Korrelation der Ergebnisse von korrespondierenden Messungen an räumlich weit entfernten Teilen eines quantentheoretischen Systems verantwortlich sind. Bell behauptet dabei gar nicht, daß es keine VPTh'en geben könne, sondern nur, daß alle VPTh'en die erwähnte "unschöne" Eigenschaft besitzen.

Alle übrigen Untersuchungen [5.8] beschränken sich dagegen von vornherein auf die dritte Gruppe von VPTh'en und zeigen mit Hilfe bestimmter Voraussetzungen, daß solche VPTh'en nicht möglich sind.

Aus der Beschränkung auf Theorien der dritten Gruppe folgt natürlich sofort, daß alle diese "Widerspruchsbeweise" weder die Bohm'sche Theorie noch die ursprüngliche WSTh betreffen, da beide ja von allgemeineren Ansätzen ausgehen. Wie steht es aber mit dem Anspruch dieser Sätze, alle ensembletheoretischen Formulierungen der Quantentheorie - und damit auch die VWSTh - als sich selbst oder der Erfahrung widersprechend erwiesen zu haben?

Nun zeigt offensichtlich Satz (4) unserer Arbeit, daß diese Sätze doch nicht alle denkbaren VPTh'en der dritten Gruppe "verbieten"; und es ist auch völlig klar, woran dies liegt: In allen diesen Sätzen werden Voraussetzungen gemacht, die nicht notwendig (und oft nicht einmal plausibel) sind. Es würde zu weit führen, alle bisher veröffentlichten Untersuchungen im einzelnen zu diskutieren [5.9]. Für unsere Zwecke reicht die Beobachtung, daß die Voraussetzungen aller (uns bekanntgewordenen) "Widerspruchsbeweise" einen gemeinsamen Durchschnitt besitzen, der folgende Annahme enthält:

Annahme (L) Die Menge $\sum$ aller Zustandeigenschaften enthält eine Teilmenge $\sum_L$ mit folgenden Eigenschaften:

- (a) Zu zwei beliebigen Propositionen $a, b \in \sum_L$ existiert auch eine Proposition $a \wedge b := c$ in $\sum_L$ mit den Eigenschaften $c \leq a, b$ und $x \leq a, b \Rightarrow x \leq c$.
- (b) Treffen die Zustandseigenschaften a und b aus $\sum_L$ beide auf einen beliebigen Mikrozustand des Systems zu, so trifft auch die Zustandseigenschaft $a \wedge b$ für diesen Mikrozustand zu.
- (c) $\sum_L$ enthält mindestens ein Paar von unverträglichen Propositionen.

Die Annahme (L) liegt übrigens auch den Sätzen (1) und (3.2,4) bzw. (3.2,4#) dieser Arbeit zugrunde, die ja ebenfalls die Inkonsistenz gewisser VPTh'en aufgezeigt und uns gerade zur Verallgemeinerung der Observablenkonzeption gezwungen haben [5.1].

Die Erörterungen der verallgemeinerten Observablenkonzeption der VWSTh in § 3.1 und § 4.1 zeigen aber ganz klar, daß Annahme (L) bei aller Plausibilität und Anschaulichkeit physikalisch nicht zwingend ist; die Ausführungen von § 3.1 stellen daher gleichzeitig ein inhaltliches Argument gegen die bisher veröffentlichten "Widerspruchsbeweise" dar.

Damit wollen wir die knappe Diskussion des allgemeinen Problems der Existenz verborgener Parameter beenden und zum Schluß nochmals die wesentlichen Ergebnisse unserer Arbeit zusammenfassen.

6. Zusammenfassung

Ausgangspunkt der vorliegenden Arbeit war eine Untersuchung der Differentialraum-Quantentheorie von Wiener und Siegel, bei der so gravierende Mängel sichtbar wurden, daß sie diese Theorie als VPTh uninteressant machen. Dieses Ergebnis warf die Frage auf, ob sich die WSTh entscheidend "verbessern" läßt oder ob die Mängel der WSTh theorieimmanent, d.h. bereits in den physikalischen Voraussetzungen der Theorie impliziert sind. Diese zunächst vage Fragestellung führte zu folgendem Problem: Existiert eine ensembletheoretische Formulierung der Quantentheorie mit folgenden Eigenschaften

- (a) Jedes Objekt befindet sich zu jedem Zeitpunkt in einem bestimmten "Mikrozustand", dessen definierende Parameter sich (im Prinzip) sämtlich - wenn auch nicht alle gemeinsam - durch eine ideale Messung feststellen lassen.
- (b) Analog dem Aufbau der klassischen statistischen Mechanik lassen sich die experimentell realisierbaren "Makrozustände" eines Objekts durch Ensembles von virtuellen Systemen in präzisen Mikrozuständen repräsentieren; dabei ergibt sich der Erwartungswert einer Observablen als Ensemblemittelwert des entsprechenden Mikrozustand-Parameters, und die zeitliche Entwicklung der Erwartungswerte wird durch die deterministische "Zustandsströmung" der Ensembleelemente induziert.
- (c) Die in der orthodoxen Quantenmechanik problematische Erklärung der "Reduktion des Zustandsoperators" ergibt sich in der ensembletheoretischen Formulierung der Quantentheorie ganz "harmlos" durch eine "Ensemble-reduktion durch Informationszunahme" bei der Ablesung des Instruments.

Die nähere Untersuchung dieses Problems in den vorangegangenen Kapiteln der vorliegenden Arbeit führte zu folgenden Ergebnissen:

- 1) Eine deterministische Formulierung der Quantentheorie in Gestalt einer klassischen Ensembletheorie kann nur dann an der idealen Messung von Objekteigenschaften festhalten, wenn die eineindeutige Zuordnung zwischen Observablen und selbstadjungierten Operatoren aufgegeben wird.
- 2) Akzeptiert man aber eine leicht verallgemeinerte Observablenkonzeption mit der zugehörigen neuen mathematischen Darstellung der Observablen (etwa in der aus physikalischen Überlegungen entwickelten Form von § 3.1), so existiert tatsächlich (mindestens) eine ensembletheoretische Formulierung der Quantentheorie mit den Eigenschaften (a) und (b).

3) Allerdings erlauben diese ensembletheoretischen Formulierungen der Quantentheorie keine exakte und konsistente Beschreibung des quantentheoretischen Meßprozesses in der oben angedeuteten Form: Setzt eine ensembletheoretische Formulierung der Quantentheorie mit den Eigenschaften (a) und (b) die von der Quantenmechanik gegebenen Erwartungswerte der Observablen als exakt voraus, so kann sie das "Projektionsaxiom"

$$W \rightarrow \frac{PWP}{\text{Sp}(WP)} \text{ nur als Näherungsformel gelten lassen.}$$

Diese Ergebnisse zeigen, daß sich zwar viele aber nicht alle Mängel der WSTh beheben lassen.

7. Anhang

Beweis zu Lemma (3.1)

Da der Beweis von Lemma (3.1) bei Beschränkung auf Operatoren mit rein diskretem Spektrum einfacher und durchsichtiger ausfällt, beweisen wir die Äquivalenzaussage zunächst für diesen Sonderfall und geben danach einen Beweis für Operatoren mit beliebigem Spektrum.

(a) Es gelte die Beziehung $f(A) = {}^\circ f(A)$ (1)
für alle Observablen mit rein diskretem Spektrum. Ist $\mathcal{A}$ eine Observable mit dem zugeordneten Operator $\mathcal{G}(\mathcal{A}) = A = \sum a_v P_{a_v}$, so folgt aus Voraussetzung (b)

$$A = \sum_v a_v \mathcal{E}_h[A=a_v] \quad \text{und} \quad \mathcal{E}_h[A=a_v] \cdot \mathcal{E}_h[A=a_\mu] = \delta_{\mu v} \mathcal{E}_h[A=a_v] \quad (2)$$

Entsprechend gilt für eine beliebige borelsche Funktion f

$$B = f(A) = \sum_v f(a_v) P_{a_v} = \sum_{b_i \in \text{SpT}(B)} b_i \sum_{f(a_\mu)=b_i} P_{a_\mu} =: \sum_i b_i P_{b_i} \quad (3)$$

und

$${}^\circ B = {}^\circ f(A) = \sum_i b_i \mathcal{E}_h[{}^\circ B=b_i] = \sum_{b_i \in \text{SpT}({}^\circ f(A))} b_i \mathcal{E}_h[{}^\circ f(A)=b_i] \quad (4)$$

Betrachten wir insbesondere die Funktionen

$$g_n(\lambda) = \begin{cases} 1 & \lambda \in (a_n - \varepsilon_n, a_n + \varepsilon_n) \text{ für geeignete } \varepsilon_n \\ 0 & \text{für } \lambda \leq a_n - \varepsilon_n, \lambda \geq a_n + \varepsilon_n; \text{ speziell für } \lambda = a_v \text{ mit } v \neq n \end{cases}$$

so erhalten wir

$$g_n(A) = \sum_v g_n(a_v) P_{a_v} = P_{a_n} \quad \text{und damit} \quad {}^\circ g_n(A) = \mathcal{E}_h[{}^\circ P_{a_n} = 1] = {}^\circ P_{a_n} \quad (5)$$

$$\text{Aus (2) ergibt sich} \quad {}^\circ g_n(A) = \sum_v g_n(a_v) \mathcal{E}_h\{A=a_v\} = \mathcal{E}_h\{A=a_n\} \quad (6)$$

ein Vergleich von (5) und (6) liefert dann mit Hilfe der Voraussetzung (i)

$$\mathcal{E}_h\{A=a_n\} = {}^\circ P_{a_n} \quad (7) \quad \text{und damit folgt aus (2)} \quad A = \sum_v a_v {}^\circ P_{a_v} \quad (8)$$

Aus (8) ergibt sich weiter $f(A) = \sum_v f(a_v) {}^\circ P_{a_v}$ und damit folgt aus (i)

$$(9) \quad {}^\circ f(A) = \sum_v f(a_v) {}^\circ P_{a_v} \quad \text{für alle borelschen Funktionen } f.$$

(b) Umgekehrt gelte nun für alle Observablen $\mathcal{A}$ mit einem Operator $\mathcal{G}(\mathcal{A})$ der Form $A = \sum_v a_v P_{a_v}$ die Beziehung ${}^\circ A = \sum_v a_v {}^\circ P_{a_v}$. (10)

Ist f eine borelsche Funktion, so folgt aus (10)

$$f(A) = \sum_v f(a_v) {}^\circ P_{a_v}$$

Andererseits folgt aus (3) und (10) $\circ f(\lambda) = \sum_i b_i \circ P_{b_i} = \sum_i b_i \circ \left(\sum_{b_i = f(a_\mu)} P_{a_\mu} \right)$

Zur Ableitung von Gl (1) muß also lediglich noch die Beziehung

(11) $\circ \left(\sum_{v \in M} P_{a_v} \right) = \sum_{v \in M} \circ P_{a_v}$ bewiesen werden. Dazu betrachten wir die beiden Operatoren $B = \beta_1 \sum_{v \in M} P_{a_v} + \beta_2 (1 - \sum_{v \in M} P_{a_v})$ und $C = \sum_{v \in M} \gamma_v P_{a_v} + \delta (1 - \sum_{v \in M} P_{a_v})$ bzw. ihre Observablenwertfunktionen und erhalten unter Berücksichtigung von (2), (7) und (10)

$$\circ B = \beta_1 \circ \left(\sum_v P_{a_v} \right) + \beta_2 \circ (1 - \sum_v P_{a_v}) \quad 1 = \circ \left(\sum_v P_{a_v} \right) + \circ (1 - \sum_v P_{a_v}) \quad (12)$$

$$\circ C = \sum_v \gamma_v \circ P_{a_v} + \delta \circ (1 - \sum_v P_{a_v}) \quad 1 = \sum_v \circ P_{a_v} + \circ (1 - \sum_v P_{a_v})$$

Ein Vergleich der beiden rechten Gleichungen aus (12) liefert die Beziehung (11) und damit auch die Beziehung (1). Damit ist die Äquivalenz von (1) und (10) für den Spezialfall diskreter Observablen bewiesen.

Im folgenden lassen wir nun die Beschränkung auf Operatoren mit rein diskretem Spektrum fallen und beweisen die Äquivalenz aus Lemma (3.1) für Operatoren mit beliebigem Spektrum.

(C) Wir setzen zunächst wieder die Gültigkeit der Beziehung $f(\circ A) = \circ f(A)$ für beliebige Observable voraus. Ist α eine Observable mit

$$\sigma(\alpha) = A = \int \lambda dE_\lambda \quad \text{und bedeutet} \quad q_\lambda(\sigma) = \begin{cases} 1 & \text{für } \lambda \geq \sigma \\ 0 & \text{für } \lambda < \sigma \end{cases}, \text{ so ergibt sich}$$

$$q_\lambda(A) = \int q_\lambda(\sigma) dE_\sigma = \int_{-\infty}^{\lambda+\infty} dE_\sigma = E_\lambda \quad (13)$$

und aus (1) und (13) erhalten wir

$$q_\mu(\circ A) = \mathcal{U}[x \in \Omega \mid \circ A \leq \mu] = \circ q_\mu(A) = \circ E_\mu \quad (14)$$

Betrachten wir nun für festes x die Funktion $\circ E_\lambda(x)$ als Funktion von λ , so ergibt sich aus (14): $\nu \leq \mu \Rightarrow \circ E_\nu \leq \circ E_\mu$, d.h. $\circ E_\lambda(x)$ ist eine monoton steigende Funktion in λ . Andererseits kann die Funktion $\circ E_\lambda$ auf Grund von Voraussetzung (b) nur die Werte 0 und 1 annehmen; das bedeutet

$$\circ E_\lambda(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } \lambda \geq \alpha(x) \\ 0 & \text{für } \lambda < \alpha(x) \end{cases} = \Theta(\lambda - \alpha(x)) \quad (15)$$

Ein Vergleich von (14) und (15) ergibt $\circ E_\mu(x) = 1 \Leftrightarrow \circ A(x) \leq \mu \Leftrightarrow \alpha(x) < \mu$

Daraus folgt $\alpha(x) = \circ A(x)$ und wir erhalten

$$\circ A(x) = \int \lambda d\Theta(\lambda - \circ A(x)) = \int \lambda d\circ E_\lambda(x) \quad (16)$$

Ebenso ergibt sich

$$\int f(\lambda) d\circ E_\lambda(x) = \int f(\lambda) d\Theta(\lambda - \circ A) = f(\circ A) \stackrel{(1)}{=} \circ f(A) \quad (17)$$

Damit ist die eine Richtung der Äquivalenzbeziehung bewiesen.

(d) Nun setzen wir voraus, daß für alle Observablen mit $G(x) = A = \int \lambda dE_\lambda$ die Beziehung $A = \int \lambda d^\circ E_\lambda(x)$ gilt. (18)

Unter Verwendung der Ergebnisse von (b) beweisen wir zunächst folgenden

Hilfssatz: Unter den Voraussetzungen (a), (b) und (18) gilt

$$\Phi_x(M) := \int_M d^\circ E_\lambda(x) \stackrel{!}{=} \int_M dE_\lambda(x) =: \Psi_x(M) \quad (19)$$

für alle borelschen Mengen M.

Beweis: Unter Voraussetzung (18) gilt die Beziehung $^\circ(\sum p_i) = \sum p_i$ (11) für beliebige Summen orthogonaler Projektionsoperatoren. Aus (11) ergibt sich für $b > a$

$$E_b = (E_b - E_a) + E_a \Rightarrow ^\circ(E_b - E_a) = ^\circ E_b - ^\circ E_a \quad (20)$$

und aus (20) folgt ein wichtiger Spezialfall von Behauptung (19):

$$E_b - E_a = \int_{a \rightarrow b} dE_\lambda \Rightarrow ^\circ(E_b - E_a) = ^\circ \left(\int_{a \rightarrow b} dE_\lambda \right) \Rightarrow ^\circ E_b - ^\circ E_a = ^\circ \left(\int_{a \rightarrow b} dE_\lambda \right) \quad (21)$$

Andererseits folgt aus (18), daß $^\circ E_\lambda(x)$ für festes x fast überall gleich der Funktion $\Theta(\lambda - A(x))$ ist; daraus ergibt sich $\int_{a \rightarrow b} d^\circ E_\lambda = ^\circ E_b - ^\circ E_a$ (22)

Aus (21) und (22) folgt dann $\Phi_x = \Psi_x$ für alle Intervalle der Form $(a, b]$; (a, ∞) und $(-\infty, b]$. (23)

Wir müssen nun noch das Ergebnis (23) auf alle borelschen Mengen ausdehnen. Dazu zeigen wir zunächst, daß die Mengenfunktionen Φ_x und Ψ_x Wahrscheinlichkeiten auf der σ -Algebra $\mathcal{L}$ aller Borelmengen sind:

1] Aus den oben gefundenen Eigenschaften von $^\circ E_\lambda(x)$ folgt unmittelbar, daß $\Phi_x(\cdot)$ auf ganz $\mathcal{L}$ eindeutig definiert ist. Weiter ist $\int_M dE_\lambda$ für alle $M \in \mathcal{L}$ ein Projektionsoperator und nach Voraussetzung existiert dann auch die Funktion Ψ_x auf ganz $\mathcal{L}$ und ist überall eindeutig definiert.

2] Sowohl Φ_x als auch Ψ_x können auf ganz $\mathcal{L}$ nur die Werte 0 und 1 annehmen; außerdem gilt offensichtlich $\Phi_x(\emptyset) = 0$, $\Psi_x(\emptyset) = 0$ sowie

$$\Phi_x(\mathbb{R}) = \Psi_x(\mathbb{R}) = 1 \quad (24) \quad 3] \text{ Die } \sigma\text{-Additivität von } \Phi_x \text{ folgt}$$

unmittelbar aus der Definition von Φ_x als Lebesgue-Stieltjes-Integral; die σ -Additivität von Ψ_x folgt aus (11), wenn wir bedenken, daß $\int_M dE_\lambda$ für alle $M \in \mathcal{L}$ einen Projektionsoperator darstellt. Nun stimmen bekanntlich zwei Maße auf der gleichen σ -Algebra genau dann überein, wenn sie bereits auf einem die σ -Algebra erzeugenden Semiring übereinstimmen.

Betrachten wir das Mengensystem $S = \{\emptyset, \mathbb{R}; (-\infty, a], (b, a], (b, \infty)\}$

$\forall a, b \in \mathbb{R}$. Bekanntlich ist S ein Semiring und $\mathcal{L}$ die kleinste

σ -Algebra, die S enthält. Das bedeutet $\Phi_x = \Psi_x$ auf S $\Leftrightarrow \Phi_x = \Psi_x$ auf $\mathcal{L}$.

Nun haben wir aber in (23) und (24) bereits gezeigt, daß Φ_x und Ψ_x auf S übereinstimmen; damit ist unser Hilfssatz bewiesen.

Wir betrachten nun den Operator $B = f(A)$ für eine beliebige borelmeßbare Funktion f . Bekanntlich gilt

$$B = f(A) = \int_S dF_f = \int f(\lambda) dE_\lambda \quad \text{mit} \quad F_f = \int_{\{f(\lambda) \leq s\}} dE_\lambda \quad (25)$$

Aus (18) folgt nun

$${}^\circ B = {}^\circ f(A) = \int_S d{}^\circ F_f \quad (26)$$

und aus (19) folgt

$${}^\circ F_f = {}^\circ \int_{\{f(\lambda) \leq s\}} dE_\lambda = \int_{\{f(\lambda) \leq s\}} d{}^\circ E_\lambda \quad (27)$$

aus (26) und (27) ergibt sich

$${}^\circ f(A) = \int_S d \left[\int_{\{f(\lambda) \leq s\}} d{}^\circ E_\lambda \right] = \int f(\lambda) d{}^\circ E_\lambda \quad (28)$$

Andererseits folgt aus ${}^\circ E_\lambda = \Theta(\lambda - {}^\circ A) : f({}^\circ A) = \int f(\lambda) d{}^\circ E_\lambda$

und damit gilt $f({}^\circ A) = {}^\circ f(A)$ für alle borelschen Funktionen.

Damit haben wir den wesentlichen Teil des Satzes - die Äquivalenz der Beziehungen (1) und (18) - allgemein bewiesen und müssen nun noch die Folgerungen (1), (2) und (3) aus (1) und/oder (18) ableiten.

Folgerung (1) wurde bereits in (7) bzw. (14) abgeleitet. Folgerung (3) ergibt sich unmittelbar aus (12) bzw. (22).

Sei nun $A \cdot B = 0$. Dann existiert ein Operator $G = \int \lambda dR_\lambda$ mit den Eigenschaften

$$A = a(G) = \int a(\lambda) dR_\lambda, \quad B = b(G) = \int b(\lambda) dR_\lambda \quad \text{und} \quad a(\lambda) \cdot b(\lambda) = 0 \quad (29)$$

Ist nun ${}^\circ A(x) \neq 0$, so folgt aus

$${}^\circ A(x) = {}^\circ a(G) = a({}^\circ G) = \int a(\lambda) d\Theta(\lambda - {}^\circ G) \neq 0$$

die Gleichung ${}^\circ B(x) = {}^\circ b(G) = b({}^\circ G) = \int b(\lambda) d\Theta(\lambda - {}^\circ G) = 0$

und umgekehrt; d.h. wir erhalten ${}^\circ A(x) \cdot {}^\circ B(x) = 0$ (30)

Entsprechend gilt ${}^\circ(A+B) = {}^\circ[a+b](G) = \int [a(\lambda) + b(\lambda)] d\Theta(\lambda - {}^\circ G)$

$$= \int a(\lambda) d\Theta + \int b(\lambda) d\Theta = {}^\circ A + {}^\circ B \quad (31)$$

Sei schließlich $R \leq S$; dann existiert ein Operator $L = \int \lambda dT_\lambda$ mit der Eigenschaft $K = \int 1(\lambda) dT_\lambda = 1(L)$; $S = s(L) = \int s(\lambda) dT_\lambda$; $1(\lambda) \in \mathcal{C}(\lambda)$

Aus (17) folgt dann ${}^\circ R = \int 1(\lambda) d{}^\circ T_\lambda \leq \int s(\lambda) d{}^\circ T_\lambda = {}^\circ S$ (32)

Damit ist Lemma (3.1) vollständig bewiesen.

Beweis zu Lemma (3.2)

Nach Voraussetzung (c) enthält der Hilbertraum $\mathcal{H}$ des betrachteten Systems einen dreidimensionalen Teilraum $\mathcal{H}_3$. Sind φ_0 und φ_1 zwei Einheits-elemente aus $\mathcal{H}_3$, so existiert ein drittes Element φ_2 aus $\mathcal{H}_3$ mit den Eigenschaften $\varphi_0 = \varphi_1 + \varepsilon \varphi_2$, ε reelle Zahl, $\langle \varphi_1 | \varphi_2 \rangle = 0$

Dazu wählen wir noch ein weiteres Element $\varphi_3 \in \mathcal{H}_3$ mit der Eigenschaft $\langle \varphi_3 | \varphi_j \rangle = \delta_{3j}$ ($j=1,2,3$) und definieren in dem von $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ aufgespannten Teilraum $\mathcal{H}_3$ die weiteren Elemente

$$\psi_1 = \varphi_0 + \frac{\varepsilon}{\gamma} \varphi_3 = \varphi_1 + \varepsilon \varphi_2 + \frac{\varepsilon}{\gamma} \varphi_3 \quad \text{mit } \gamma \neq 0$$

$$\psi_2 = -\varepsilon \varphi_2 + \gamma \varepsilon \varphi_3$$

$$\psi_3 = \varphi_1 + \varepsilon \left(\gamma + \frac{1}{\gamma} \right) \varphi_3$$

Für den Fall $\varepsilon \leq 1/2$ existieren nun spezielle Werte von γ mit

$\varepsilon \left(\gamma + \frac{1}{\gamma} \right) = \pm 1$. Unter der Voraussetzung $\varepsilon \leq \frac{1}{2}$ haben wir daher die Elemente $\psi_3' = \varphi_1 + \varphi_3$ und $\psi_3'' = \varphi_1 - \varphi_3$ aus $\mathcal{H}_3$ als Spezialfälle von ψ_3 . Die Elemente ψ_i haben die Eigenschaften

$$\langle \psi_1 | \psi_2 \rangle = 0, \quad \psi_3 = \psi_1 + \psi_2, \quad \langle \psi_3' | \psi_3'' \rangle = 0, \quad \psi_3' + \psi_3'' = 2\varphi_1$$

Wir betrachten nun die Menge $\mathcal{N} = \{x \in \mathcal{Q} \mid {}^\circ P_{\psi_0} = 0, {}^\circ P_{\psi_1} = 1\} = \mathcal{N}_{\psi_1} \cap \overline{\mathcal{N}_{\psi_0}} \quad (3.3)$

Aus $P_{\psi_1} \cdot P_{\psi_2} = P_{\psi_1} P_{\psi_3} = 0$ und Voraussetzung (e.1) folgt:

$${}^\circ P_{\psi_2} = {}^\circ P_{\psi_3} = 0 \quad \forall x \in \mathcal{N}$$

Aus $P_{\psi_0} P_{\psi_3} = P_{\psi_2} P_{\psi_3} = 0$ und Voraussetzung (e.2) folgt:

$${}^\circ P_{\psi_1} = {}^\circ P_{\psi_2} = 0 \quad \forall x \in \mathcal{N}$$

Aus $P_{\psi_1} P_{\psi_2} = 0$, $P_{\psi_3} < P_{\psi_1} + P_{\psi_2}$ und Voraussetzung (e.2) folgt:

$${}^\circ P_{\psi_3} = 0 \quad \forall x \in \mathcal{N}, \quad \forall \gamma \neq 0$$

Im Fall $\varepsilon \leq \frac{1}{2}$ bedeutet das speziell auch ${}^\circ P_{\psi_3'} = {}^\circ P_{\psi_3''} = 0 \quad \forall x \in \mathcal{N} \quad (3.4)$

Wegen $P_{\psi_3'} \cdot P_{\psi_3''} = 0$, $P_{\psi_1} < P_{\psi_3'} + P_{\psi_3''}$ und Voraussetzung (e.2) bedeutet

das: ${}^\circ P_{\psi_1} = 0 \quad \forall x \in \mathcal{N} \quad (3.5)$ Aus (3.5) folgt insbesondere

$\mu_{\psi_1} \{x \in \mathcal{N} \mid {}^\circ P_{\psi_1} = 1\} = 0$. Wegen der Definition von $\mathcal{N}$ ergibt sich daraus $\mu_{\psi_1}(\mathcal{N}) = 0$, was gegen die Voraussetzung (3.41) verstößt.

Unter den Voraussetzungen von Lemma (3.2) führt also die Annahme $\varepsilon < \frac{1}{2}$ zu einem Widerspruch; damit erhalten wir das Ergebnis $\varepsilon = \|\varphi_0 - \varphi_1\| \geq \frac{1}{2}$

q.e.d.

Beweis zu Satz (1)

Wir setzen im folgenden alle in Satz (1) erwähnten Annahmen und dazu noch die Beziehungen $f(^{\circ}A) = ^{\circ}f(A)$ und $\dim \mathcal{H} \geq 3$ voraus. Dann enthält $\mathcal{H}$ einen dreidimensionalen Teilraum $\mathcal{H}_3$ und man überlegt sich leicht, daß erst recht auch alle Voraussetzungen von Lemma (3.2) erfüllt sind.

Wir betrachten nun zwei beliebige Elemente u, v aus $\mathcal{H}_3$ mit den Eigenschaften $\|u\| = \|v\| = 1$, $0 < |\langle u|v \rangle| < 1$ und $\|u-v\| < \frac{1}{2}$ (36)

Aus Forderung (3.2) und Lemma (3.1) ergibt sich dann:

$$\begin{aligned} Sp[P_u(1-P_v)] &= \mu_{P_u}(\overline{m}_{P_v}) = \mu_{P_u}\{(\overline{m}_{P_u} \cup \overline{m}_{P_v}) \cap \overline{m}_{P_v}\} \\ &= \mu_{P_u}\{\overline{m}_{P_u} \cap \overline{m}_{P_v}\} + \mu_{P_u}\{\overline{m}_{P_u} \cap \overline{m}_{P_v}\} \\ &\leq \mu_{P_u}\{\overline{m}_{P_u} \cap \overline{m}_{P_v}\} + \mu_{P_u}(\overline{m}_{P_u}) \\ &= \mu_{P_u}\{\overline{m}_{P_u} \cap \overline{m}_{P_v}\} \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} 0 < 1 - Sp(P_u P_v) &= 1 - |\langle u|v \rangle|^2 \leq \mu_{P_u}\{\overline{m}_{P_u} \cap \overline{m}_{P_v}\} \\ \Rightarrow \mu_{P_u}\{x \in \Omega \mid P_u(x) = 1, P_v(x) = 0\} &> 0 \end{aligned} \quad (37)$$

Aus (37) und Lemma (3.2) folgt unmittelbar $\|u-v\| > \frac{1}{2}$, was den Eigenschaften (36) der oben ausgewählten Elemente $u, v \in \mathcal{H}_3$ widerspricht.

Damit ist der behauptete Widerspruch nachgewiesen. q.e.d.

Beweis zu Lemma (3.3)

Der formale Beweis ist sehr einfach. Die Voraussetzung bedeutet offenbar, daß die Funktion $E_w(\mathcal{P}) = Sp(WP)$ auf sämtlichen Propositionen aus $\mathcal{H}$ nur die Werte 0 oder 1 annehmen kann. Ist nun $A = \int \lambda dE_\lambda$ das Bild einer beliebigen Observablen $\mathcal{A}$ aus $\mathcal{H}$, so ist die Funktion $Sp(E_\lambda W)$ offensichtlich eine Sprungfunktion $\mathcal{P}(\lambda = E_w(\mathcal{A}))$, deren Sprungstelle

nach Voraussetzung im Spektrum von A liegt. Damit erhalten wir unmittelbar

$$f(E_w(\mathcal{A})) = f(Sp(AW)) = f\left(\int \lambda dSp(W E_\lambda)\right) =$$

$$\begin{aligned} f\left(\int \lambda d\Theta(\lambda - E_W(a))\right) &= \int f(\lambda) d\Theta(\lambda - E_W(a)) = \int f(\lambda) dS_P(W E_\lambda) \\ &= S_P(W f(A)) = E_W(f(a)) \end{aligned} \quad \text{q.e.d.}$$

Beweis zu Lemma (4.1)

ad (a): Aus $P \cdot Q = 0$ und $QW = 0$ ergibt sich

$$0 = S_P(QW) = \mu_W^\varepsilon(\mathcal{M}_Q^\beta) \geq \mu_W^\varepsilon(\mathcal{M}_Q^\beta \cap \mathcal{M}_P^\alpha)$$

und das bedeutet $\mu_W^\varepsilon\{x \mid {}^\circ Q^\beta = {}^\circ P^\alpha = 1\} = \mu_W^\varepsilon\{x \mid {}^\circ Q^\beta \cdot {}^\circ P^\alpha \neq 0\} = 0$

q.e.d.

ad (b): Wir setzen zunächst die Gültigkeit von (4.7) voraus und betrachten einen Zustandsoperator V und ein Paar von Projektionsoperatoren R, S mit $R \leq S$ und $V \leq S$ oder $VR = 0$. Dann gilt $R(1-S) = 0$ und

$V(1-S) = 0$ oder $VR = 0$. Aus (4.7) ergibt sich dann

$$\begin{aligned} {}^\circ R^\alpha \cdot {}^\circ (1-S)^\beta &= 0 \quad [\mu_V^\delta] \quad \text{oder in anderer Schreibweise} \\ {}^\circ R^\alpha &\leq {}^\circ S^\beta \quad [\mu_V^\delta] \quad \forall \alpha, \beta, \delta \end{aligned}$$

Wir setzen nun umgekehrt die Gültigkeit von (4.8) voraus und betrachten einen Zustandsoperator W und ein Paar von Projektionsoperatoren P, Q mit $P \cdot Q = 0$ und $PW = 0$ oder $QW = 0$. Dann gilt $P \leq (1-Q)$ und

$W \leq (1-Q)$ oder $WP = 0$, und aus (4.8) ergibt sich

$$\begin{aligned} {}^\circ P^\alpha &\leq {}^\circ (1-Q)^\beta \quad [\mu_W^\varepsilon] \quad \forall \alpha, \beta, \varepsilon \quad \text{oder in anderer Schreibweise} \\ {}^\circ P^\alpha \cdot {}^\circ Q^\beta &= 0 \quad [\mu_W^\varepsilon] \quad \forall \alpha, \beta, \varepsilon \end{aligned}$$

Damit ist Lemma (4.1) bewiesen.

Beweis zu Lemma (4.2)

Wir zeigen zunächst, daß bei Voraussetzung der Axiome [2] bis [3] und von Beziehung (4.9) - bzw. der zu (4.9) äquivalenten Beziehung (4.10) -

auch die Voraussetzungen von Lemma (3.2) erfüllt sind.

Mit $P \leq P$ ergibt sich aus (4.9) ${}^\circ P^\alpha = {}^\circ P^\beta \quad \forall x; \quad \forall \alpha, \beta \quad (38)$

Ist $P_1 \cdot P_2 = 0$, so existiert eine Zerlegung der Einheit S mit

$\circ P_1^\delta + \circ P_2^\delta = \circ (P_1 + P_2)^\delta$ und aus (38) erhält man

$$\circ P_1^\alpha + \circ P_2^\beta = \circ (P_1 + P_2)^\delta \quad \forall x; \tilde{V}_{\alpha, \beta, \gamma} \quad \text{oder in anderer Schreibweise}$$

$$\mathcal{M}_{P_1}^\alpha \cup \mathcal{M}_{P_2}^\beta = \mathcal{M}_{P_1+P_2}^\delta, \quad \mathcal{M}_{P_1}^\alpha \cap \mathcal{M}_{P_2}^\beta = \emptyset \quad \forall x; \tilde{V}_{\alpha, \beta, \gamma} \quad (39)$$

Ist nun $Q < P_1 + P_2$, so folgt aus (4.9) und (39)

$$\mathcal{M}_Q^\delta \subseteq \mathcal{M}_{P_1}^\alpha \cup \mathcal{M}_{P_2}^\beta \quad \text{oder} \quad \overline{\mathcal{M}}_Q^\delta \supseteq \overline{\mathcal{M}}_{P_1}^\alpha \cap \overline{\mathcal{M}}_{P_2}^\beta \quad (40)$$

Mit (4.10) und (40) erhalten wir also Voraussetzung (e) von Lemma (3.2):

$$\text{Aus } P \cdot Q = 0 \text{ und } \circ P^\alpha(x) = 1 \text{ folgt } \circ Q^\beta(x) = 0 \quad \forall x; \tilde{V}_{\alpha, \beta}$$

$$\text{Aus } P_1 \cdot P_2 = 0, Q < P_1 + P_2 \text{ und } \circ P_1^\alpha(x) = \circ P_2^\beta(x) = 0 \text{ folgt } \circ Q^\delta(x) = 0 \quad \forall x; \tilde{V}_{\alpha, \beta, \delta}$$

Die übrigen Voraussetzungen von Lemma (3.2) sind in den Axiomen [0] bis [3] direkt enthalten. Nachdem nun gezeigt ist, daß alle Voraussetzungen von Lemma (3.2) erfüllt sind, verläuft der Rest des Beweises wie in Beweis zu Satz (1).

Beweis zu Satz (3)

ad (3.1)

1) Angenommen, es gelten die Annahmen $[A_1], [A_2], [B_2]$ und $\neg[B_1]$; dann existiert mindestens ein Paar von Propositionen P^α, Q^β und mindestens ein Makrozustand U^δ mit den Eigenschaften

$$P \leq Q \quad \text{und} \quad \underbrace{\mu_{U^\delta}(\mathcal{M}_P^\alpha \cap \overline{\mathcal{M}}_Q^\beta)}_M > 0 \quad (41)$$

Wir betrachten nun eine Zerlegung der Einheit $1^\varepsilon = \sum_i R_i + \sum_j S_j + \sum_k T_k$ mit den Eigenschaften

$$Sp(R_i) = Sp(S_j) = Sp(T_k) = 1 \quad \forall i, j, k; \quad \sum R_i = P, \quad \sum S_j = Q - P, \quad \sum T_k = 1 - Q \quad (42)$$

Nach Annahme $[A_1, B]$ existiert dann ein extrem unscharfer Makrozustand $\hat{W}_1^\varepsilon$ mit $\hat{W}_1 = \sum \lambda_i R_i + \sum \lambda'_j S_j + \sum \lambda''_k T_k$ und $\sum_{i,j,k} \lambda_i + \lambda'_j + \lambda''_k = 1$,

$\lambda_i, \lambda'_j, \lambda''_k > 0$ und dem zugehörigen Maß $\mu_{\hat{W}_1}^\varepsilon$. Nach (41), $[A_1, d]$ und

$[B_2]$ gilt dann

$$\mu_{\hat{W}_1}^\varepsilon(M) = \sum_i \lambda_i \mu_{R_i}^\varepsilon(M) + \sum_j \lambda'_j \mu_{S_j}^\varepsilon(M) + \sum_k \lambda''_k \mu_{T_k}^\varepsilon(M) > 0 \quad (43)$$

Andererseits folgt aus (42) und $[A_2]$

$$\mu_{T_k}^\varepsilon(M) = \mu_{T_k}^\varepsilon(\mathcal{M}_P^\alpha \cap \overline{\mathcal{M}}_Q^\beta) \leq \mu_{T_k}^\varepsilon(\mathcal{M}_P^\alpha) = Sp(T_k P) = 0$$

$$\mu_{S_j}^{\varepsilon}(M) = \mu_{S_j}^{\varepsilon}(\pi_P^{\alpha} \cap \overline{\pi_Q^{\beta}}) \leq \mu_{S_j}^{\varepsilon}(\pi_P^{\alpha}) = S_P(S_j P) = 0$$

$$\mu_{R_i}^{\varepsilon}(M) = \mu_{R_i}^{\varepsilon}(\pi_P^{\alpha} \cap \overline{\pi_Q^{\beta}}) \leq \mu_{R_i}^{\varepsilon}(\overline{\pi_Q^{\beta}}) = S_P(R_i[1-Q]) = 0$$

Annahme (41) impliziert also einen Widerspruch, und daraus ergibt sich die erste Hälfte der Behauptung: $[A_1] \wedge [A_2] \wedge [B_2] \Rightarrow [B_1]$

2) Im folgenden setzen wir die Annahmen $[A_1]$, $[A_2]$ und $[B_3]$ voraus und betrachten die Menge $\pi_P^{\alpha} \Delta \pi_P^{\beta}$ für beliebige (zulässige) Zerlegungen der Einheit α und β :

$$\pi_P^{\alpha} \Delta \pi_P^{\beta} = (\pi_P^{\alpha} \cap \overline{\pi_P^{\beta}}) \cup (\overline{\pi_P^{\alpha}} \cap \pi_P^{\beta}) =: M \cup N \quad \text{mit } M \cap N = \emptyset \quad (44)$$

$$\pi_P^{\alpha} = \pi_P^{\beta} \cup (\pi_P^{\alpha} \cap \overline{\pi_P^{\beta}}) \setminus (\overline{\pi_P^{\alpha}} \cap \pi_P^{\beta}) \quad (45)$$

Angenommen, es gäbe einen Makrozustand u^{δ} mit

$$\mu_u^{\delta}(\pi_P^{\alpha} \Delta \pi_P^{\beta}) = \mu_u^{\delta}(M \cup N) > 0 \quad (46)$$

dann existiert nach Voraussetzung $[B_3]$ ein Makrozustand w^{ε} mit

$$\mu_w^{\varepsilon}(M) \neq \mu_w^{\varepsilon}(N) \quad (47)$$

Aus (45) ergibt sich $\mu_w^{\varepsilon}(\pi_P^{\alpha}) = \mu_w^{\varepsilon}(\pi_P^{\beta}) + \mu_w^{\varepsilon}(M) - \mu_w^{\varepsilon}(N)$

und damit folgt aus (47) $\mu_w^{\varepsilon}(\pi_P^{\alpha}) \neq \mu_w^{\varepsilon}(\pi_P^{\beta})$, was aber der Voraussetzung $[A_2]$ widerspricht.

Aus $[A_1]$, $[A_2]$ und $[B_3]$ erhalten wir also ${}^{\circ}P^{\alpha} = {}^{\circ}P^{\beta} \quad \forall \alpha$ (48)

Sind nun P, Q beliebige Projektionsoperatoren mit $P \leq Q$ und ist $\mathcal{G}$ die Zerlegung der Einheit $\frac{1}{P+(Q-P)+(1-Q)}$, so folgt aus $[A_1]$: $\pi_P^{\mathcal{G}} \cap \pi_{1-Q}^{\mathcal{G}} = \emptyset$

und aus der allgemeinen Identität $M \subseteq N \cup (M \Delta N)$ ergibt sich:

$$\begin{aligned} \pi_P^{\alpha} \cap \overline{\pi_Q^{\beta}} &= \pi_P^{\alpha} \cap \pi_{1-Q}^{\beta} \\ &\subseteq \{ \pi_P^{\mathcal{G}} \cup (\pi_P^{\mathcal{G}} \Delta \pi_P^{\alpha}) \} \cap \{ \pi_{1-Q}^{\mathcal{G}} \cup (\pi_{1-Q}^{\mathcal{G}} \Delta \pi_{1-Q}^{\beta}) \} \\ &= (\pi_P^{\mathcal{G}} \cap \pi_{1-Q}^{\mathcal{G}}) \cup \{ \pi_P^{\mathcal{G}} \cap (\pi_{1-Q}^{\mathcal{G}} \Delta \pi_{1-Q}^{\beta}) \} \cup \{ \pi_{1-Q}^{\mathcal{G}} \cap (\pi_P^{\mathcal{G}} \Delta \pi_P^{\alpha}) \} \\ &\quad \cup \{ (\pi_{1-Q}^{\mathcal{G}} \Delta \pi_{1-Q}^{\beta}) \cap (\pi_P^{\mathcal{G}} \Delta \pi_P^{\alpha}) \} \end{aligned}$$

Die rechte Seite dieser Gleichung besteht aber nach (48) aus lauter Nullmengen, so daß wir erhalten

$$P \leq Q \Rightarrow \mu_w^\varepsilon(\pi_P^\alpha \wedge \overline{\pi_Q^\beta}) = 0 \quad \forall W^\varepsilon, \forall \alpha, \beta$$

Damit haben wir die zweite Hälfte der Behauptung gezeigt:

$$[A_1] \wedge [A_2] \wedge [B_3] \Rightarrow [B_1]$$

ad (3.2)

1) Im folgenden setzen wir die Annahmen $[A_1]$ und $[B_1]$ voraus und beschränken uns auf den Fall $\dim \mathcal{H} \geq 3$. Wegen $\dim \mathcal{H} \geq 3$ enthält unser Hilbertraum einen dreidimensionalen Teilraum $\mathcal{H}_3$. Im ersten Schritt betrachten wir nun die elementaren Propositionen P_φ^α mit $\varphi \in \mathcal{H}_3$, $\|\varphi\|=1$ und nehmen an, es gäbe kein Paar von Einheitsselementen γ, ϑ aus $\mathcal{H}_3$ mit $\|\gamma - \vartheta\| < \frac{1}{2}$ und $\mu_w^\varepsilon(\pi_\gamma^\alpha \wedge \overline{\pi_\vartheta^\beta}) > 0$ für mindestens einen Makrozustand W^ε . Diese Annahme bedeutet $\pi_\gamma^\alpha \subseteq \pi_\vartheta^\beta$ $\forall x$ für alle Paare von Einheitsselementen γ, ϑ aus $\mathcal{H}_3$ mit $\|\gamma - \vartheta\| < \frac{1}{2}$. Aus Symmetriegründen folgt daraus $\pi_\gamma^\alpha = \pi_\vartheta^\beta$ $\forall x$; $\forall \alpha, \beta$ für alle $\gamma, \vartheta \in \mathcal{H}_3$ mit $\|\gamma\| = \|\vartheta\| = 1$ und $\|\gamma - \vartheta\| < \frac{1}{2}$. (49)

Da sich nun zwischen zwei beliebigen Einheitsselementen φ, ψ aus $\mathcal{H}_3$ stets eine Kette $\varphi, \gamma_1, \dots, \gamma_n, \psi$ von Einheitsselementen $\gamma_i \in \mathcal{H}_3$ legen läßt mit $\|\varphi - \gamma_1\| < \frac{1}{2}$, $\|\gamma_v - \gamma_{v+1}\| < \frac{1}{2}$, $\|\gamma_n - \psi\| < \frac{1}{2}$, so folgt aus (49) unmittelbar $\pi_\varphi^\alpha = \pi_\psi^\beta$ $\forall x$, $\forall \alpha, \beta$, $\forall \varphi, \psi \in \mathcal{H}_3$ oder in anderer Schreibweise

$$\mu_w^\varepsilon(\pi_\varphi^\alpha \Delta \pi_\psi^\beta) = 0 \quad \forall W^\varepsilon; \forall \varphi, \psi \in \mathcal{H}_3; \forall \alpha, \beta \quad (50)$$

Wir betrachten nun eine beliebige Zerlegung der Einheit, die gleichzeitig $P_{\mathcal{H}_3}$ in elementare Projektionsoperatoren zerlegt, z.B.

$$1^w = P_{\varphi_1} + P_{\varphi_2} + P_{\varphi_3} + (1 - P_{\mathcal{H}_3}) \quad \text{Aus } [A_1] \text{ folgt dann}$$

$$\pi_{\varphi_1}^w \Delta \pi_{\varphi_2}^w = \pi_{\varphi_1}^w \cup \pi_{\varphi_2}^w \quad (51)$$

Aus (50) und (51) ergibt sich

$$\mu_w^\varepsilon(\pi_{\varphi_1}^w \cup \pi_{\varphi_2}^w) = 0 \quad \forall W^\varepsilon \quad (52)$$

Gleichung (52) bedeutet aber, daß P_{φ_1} und P_{φ_2} für alle Maße der Theorie Nullfunktionen sind, was nach Voraussetzung ausgeschlossen war. Unsere obige Annahme führt daher zu einem Widerspruch und folglich gibt es

stets ein Paar von Einheitsselementen $\eta, \xi \in \mathcal{H}_3$ mit $\|\eta - \xi\| < \frac{1}{2}$ und

$$\mu_u^\delta(\overline{m}_\eta^\alpha \cap \overline{m}_\xi^\beta) > 0 \quad \text{für mindestens einen Makrozustand } u^\delta. \quad (53)$$

Im zweiten Schritt haben wir nachzuweisen, daß unter unseren Annahmen auch die Voraussetzungen von Lemma (3.2) erfüllt sind. Diesen Nachweis haben wir aber bereits im Beweis zu Lemma (4.2) geführt; dort wurden nämlich im ersten Teil des Beweises von den Axiomen [0] bis [3] nur die Annahmen benutzt, die auch in $[A_1]$ enthalten sind. Mit Hilfe von Lemma (3.2) ergibt sich nun aus (53) sofort der behauptete Widerspruch. Damit ist Aussage (3.2.1) im Fall $\dim \mathcal{H} \geq 3$ bewiesen.

Aus der Kombination der Aussagen (3.1) und (3.2.1) ergibt sich automatisch auch die Behauptung (3.2.2) für den Fall $\dim \mathcal{H} \geq 3$.

2) Wir haben nun noch zu zeigen, daß im Fall $\dim \mathcal{H} = 2$ sämtliche Annahmen $[A_1]$ bis $[B_3]$ verträglich sind.

Dazu berücksichtigen wir, daß im Fall eines zweidimensionalen Hilbertraums jeder Proposition genau ein Projektionsoperator entspricht und umgekehrt; eine zusätzliche Charakterisierung der Propositionen durch Zerlegungen der Einheit ist in diesem Fall überflüssig.

Zur Konstruktion eines geeigneten Modells ordnen wir zunächst jeder Zerlegung der Einheit $\alpha: 1^\alpha = P_1 + P_2 = P + (1-P)$ einen eigenen Wahrscheinlichkeitsraum $([0,1]^\alpha, \mathcal{D}^\alpha, m_w^\alpha)$ zu; hier bedeutet $\mathcal{D}^\alpha$ die aus den vier Elementen $[0,1]^\alpha, \emptyset, H_{P_1}^\alpha = [0, \frac{1}{2}]$ und $H_{P_2}^\alpha = [\frac{1}{2}, 1]$ bestehende Mengenalgebra über dem Einheitsintervall $[0,1]^\alpha$, und m_w^α bedeutet das durch die Vorschrift

$$m_w^\alpha(\emptyset) = 0, \quad m_w^\alpha([0,1]^\alpha) = 1, \quad m_w^\alpha(H_P^\alpha) = \text{Sp}(WP), \quad m_w^\alpha(H_{1-P}^\alpha) = 1 - \text{Sp}(WP)$$

definierte normierte Maß auf $([0,1]^\alpha, \mathcal{D}^\alpha)$.

Das gesuchte Modell erhalten wir nun als direktes Produkt dieser Wahrscheinlichkeitsräume:

$$(\mathcal{L}, \mathcal{Z}, \mu_w) := \bigotimes_\alpha ([0,1]^\alpha, \mathcal{D}^\alpha, m_w^\alpha) = \left(\prod_\alpha [0,1]^\alpha, \bigotimes_\alpha \mathcal{D}^\alpha, \bigotimes_\alpha m_w^\alpha \right)$$

In diesem Modell sind die Mengen $\mathcal{H}_P^\alpha$ eindimensionale Zylindermengen; $\mathcal{H}_P^\alpha$ hat als Basismenge $[0, \frac{1}{2}]^\alpha$ oder $[\frac{1}{2}, 1]^\alpha$, wenn $P \neq 0$ und $1^\alpha = P + (1-P)$.

$\mathcal{Z}$ ist offensichtlich die Algebra aller Zylindermengen aus $\mathcal{L}$ mit endlichdimensionalen Würfeln als Basen. Der Observablen A^α mit

$$A = a_1 P_1 + a_2 (1-P_1) \quad \text{und} \quad 1^\alpha = P_1 + (1-P_1)$$

ordnen wir die Observablenwertfunktion ${}^\alpha A^\alpha = a_1 {}^\alpha P_1^\alpha + a_2 {}^\alpha (1-P_1)^\alpha$ zu. Für dieses Modell sind die Bedingungen

$[A_1], [A_2], [B_1]$ und $[B_2]$ durch Konstruktion unmittelbar erfüllt. Um die Gültigkeit von $[B_3]$ zu zeigen, betrachten wir zwei beliebige Mengen $\mathcal{M}$ und $\mathcal{N}$ aus $\mathcal{F}$. Nach Konstruktion haben diese Mengen die Gestalt

$$\mathcal{M} = \prod_{i=1}^m M_{P_i}^{\alpha_i} \times \prod_{\beta \neq \alpha_i} [\alpha_i, \beta]^\beta \quad , \quad \mathcal{N} = \prod_{k=1}^n M_{Q_k}^{\beta_k} \times \prod_{\gamma \neq \beta_k} [\beta_k, \gamma]^\gamma$$

Aus $\mathcal{M} \cap \mathcal{N} = \emptyset$ folgt nun die Existenz eines Index ε mit der Eigenschaft, daß M_R^ε als Faktor in $\mathcal{M}$ und M_{1-R}^ε als Faktor in $\mathcal{N}$ auftreten; o.B.d.A. können wir annehmen $\alpha_1 = \beta_1 = \varepsilon$, $P_1 = R$, $Q_1 = 1-R$ und damit erhalten wir

$$\mathcal{M} = M_R^\varepsilon \times \prod_{i=2}^m M_{P_i}^{\alpha_i} \times \prod [\alpha_i, \beta]^\beta \quad ; \quad \mathcal{N} = M_{1-R}^\varepsilon \times \prod_{k=2}^n M_{Q_k}^{\beta_k} \times \prod [\beta_k, \gamma]^\gamma$$

Aus $\mu_u(\mathcal{M} \cup \mathcal{N}) > 0$ für mindestens einen Makrozustand u ergibt sich, daß in mindestens einer der beiden Mengen alle Faktoren von $\emptyset$ verschieden sind (o.B.d.A. in $\mathcal{M}$). Dann erhalten wir

$$\mu_R(\mathcal{M}) = m_R^\varepsilon(M_R^\varepsilon) \cdot \prod_{i=2}^m m_R^{\alpha_i}(M_{P_i}^{\alpha_i}) = \prod_{i=2}^m \text{Sp}(R P_i)$$

Wegen $\varepsilon \neq \alpha_i$ für $i \geq 2$ und wegen $\dim \mathcal{H} = 2$ ist R von allen elementaren Projektionsoperatoren der Zerlegungen der Einheit α_i ($i \geq 2$) verschieden, d.h. $0 < \text{Sp}(R P_i) < 1$ für $i=2, \dots, m$. Daraus folgt $\mu_R(\mathcal{M}) > 0$

Andererseits gilt aber

$$\mu_R(\mathcal{N}) = m_R^\varepsilon(M_{1-R}^\varepsilon) \prod_{k=2}^n m_R^{\beta_k}(M_{Q_k}^{\beta_k}) = 0$$

Und wir erhalten

$$\mu_R(\mathcal{M}) \neq \mu_R(\mathcal{N})$$

Damit ist die Verträglichkeit aller fünf Annahmen gezeigt.

ad (3.3)

Um Aussage (3.3) zu beweisen, konstruieren wir zu jeder (der als verträglich behaupteten) Annahmen-Kombination ein Modell, das gerade diese Annahmen erfüllt.

Modell zu (3.3.1) Ein Modell mit diesen Eigenschaften haben wir bereits in Beweis zu Satz (2) konstruiert.

Modell zu (3.3.2) Zur Konstruktion des Zustandsraumes verwenden wir den eindimensionalen, reellen euklidischen Raum $\hat{R}$. Jeder Zerlegung der Einheit $1 = \sum_{v=1}^{N_{\text{index of } \mathcal{F}}} S_v$ ordnen wir eine analoge Zerlegung des Raumes $\hat{R}$ in disjunkte Intervalle zu.

Im Fall einer endlichen Zerlegung bei $\dim \mathcal{H} \geq 3$ wählen wir dazu $N-1$ Punkte q_i aus $\hat{R}$ mit $-\infty < q_1 < q_2 < \dots < q_{N-1} < \infty$ und definieren

$$\mathcal{M}_{S_1}^{\varepsilon} = (-\infty, q_1] ; \mathcal{M}_{S_N}^{\varepsilon} = (q_{N-1}, \infty) ; \mathcal{M}_{S_i}^{\varepsilon} = (q_{i-1}, q_i] \text{ für } 1 < i < N \quad (54)$$

Im Fall $\dim \mathcal{H} = 2$ wählen wir zu jeder Zerlegung der Einheit $1^x = P + (1-P)$ ein Zahlenpaar τ, s mit $-\infty < \tau < s < \infty$ aus $\hat{R}$ und definieren

$$\mathcal{M}_P^{\alpha} = (\tau, s] , \mathcal{M}_{1-P}^{\alpha} = (-\infty, \tau] \cup (s, \infty) \quad (55)$$

Im Fall einer unendlichen Zerlegung der Einheit wählen wir abzählbar unendlich viele Punkte q_i aus $\hat{R}$ mit $\dots < q_4 < q_3 < q_2 < q_1 < q_0 < \dots$ die sich im Endlichen nicht häufen, und setzen für $n=1, 2, \dots$

$$\mathcal{M}_{S_v}^{\varepsilon} = (q_{v-2}, q_v] \text{ für } v=2n+1 ; \mathcal{M}_{S_v}^{\varepsilon} = (q_v, q_{v-2}] \text{ für } v=2n ; \mathcal{M}_{S_1}^{\varepsilon} = (q_0, q_1] \quad (56)$$

Über das System der Zerlegungen des $\hat{R}$ machen wir folgende Annahmen:

Im Fall $\dim \mathcal{H} \geq 3$ betrachten wir sämtliche Zerlegungen der Einheit

$$1^x = R + P + S \quad (57) \text{ in drei Summanden mit } Sp(P) = 1 . \text{ Diesen}$$

Zerlegungen der Einheit entsprechen nun nach (54) die Zerlegungen des

$$\hat{R} : \hat{R} = \mathcal{M}_R^{\alpha} + \mathcal{M}_P^{\alpha} + \mathcal{M}_S^{\alpha} = (-\infty, \tau] + (\tau, s] + (s, \infty) \text{ mit } -\infty < \tau < s < \infty \quad (58)$$

Nun gibt es bekanntlich mindestens so viele Zerlegungen der Einheit der Art (57) wie Zerlegungen des $\hat{R}$ der Art (58). Wir können also die Konstruktion des Modells so einrichten, daß jeder Zerlegung des $\hat{R}$ der Art (58) mindestens eine Zerlegung der Einheit (57) entspricht. Im Fall $\dim \mathcal{H} = 2$ betrachten wir alle Zerlegungen der Einheit und die ihnen zugeordneten Zerlegungen der Form (55) und erhalten das gleiche Resultat.

Jeder Proposition Q^{ε} mit $Sp(Q) < \infty$ entspricht ein Makrozustand

$$W_Q^{\varepsilon} := \frac{Q^{\varepsilon}}{Sp(Q)} . \text{ Wir ordnen nun jeder Proposition } Q^{\varepsilon} \text{ mit } Sp(Q) < \infty$$

ein normiertes Maß μ_Q^{ε} auf dem Borel-Meßraum $(\hat{R}, \mathcal{B})$ zu durch die Vorschrift

$$d\mu_Q^{\varepsilon} = \text{ca}[\mathcal{M}_Q^{\varepsilon}] f_Q^{\varepsilon}(x) dx \text{ mit } 0 < f_Q^{\varepsilon}(x) < \infty \quad \forall x \quad (59)$$

und

$$\int_{\mathcal{M}_Q^{\varepsilon}} f_Q^{\varepsilon}(x) dx = 1$$

Ist nun W^{ε} ein beliebiger Makrozustand, so gilt

$$W = \sum \lambda_v W_v = \sum \lambda_v Sp(Q_v) \frac{Q_v}{Sp(Q_v)} = \sum \lambda_v Sp(Q_v) W_{Q_v} \text{ mit } 0 < \lambda_v Sp(Q_v) < \infty,$$

$$\sum \lambda_v Sp(Q_v) = 1 . \text{ Diesem Makrozustand } W^{\varepsilon} \text{ ordnen wir nun das Maß}$$

$$\mu_W^{\varepsilon} = \sum_v \lambda_v Sp(Q_v) \mu_{Q_v}^{\varepsilon} \text{ zu.} \quad (60)$$

Ist A^* eine beliebige (diskrete) Observable mit $A = \sum a_j R_j$, so definieren wir die zugehörige Observablenwertfunktion durch $\Lambda = \sum a_j^0 R_j^0$, $R_j^0 = \text{Ch}[a_j R_j]$. Damit ist das Modell fertig und man sieht unmittelbar, daß es den Forderungen von $[A_1]$ genügt.

Sei M nun ein beliebiges Element aus $\mathcal{F}$ mit $\mu_u^s(M) > 0$. Nach Konstruktion der Mengen von $\mathcal{P}$ existiert dann ein Intervall $(a, b] \in \mathcal{P}$

$$\text{mit } a < b, (a, b] \subseteq M, \int_a^b d\mu_u^s > 0$$

Ist nun $\hat{W}^s$ ein beliebiger, extrem unscharfer Makrozustand, so gilt

$$\hat{W} = \sum_v \lambda_v Q_v \quad \text{mit } \sum_v Q_v = 1, \lambda_v > 0 \quad \forall v, \sum_v \lambda_v \text{Sp}(Q_v) = 1$$

Aus (59) und (60) ergibt sich:

$$d\mu_{\hat{W}}^s = \sum_v \lambda_v \text{Sp}(Q_v) d\mu_{Q_v}^s = \sum_v \lambda_v \text{Sp}(Q_v) \text{Ch}[m_{Q_v}^s] f_{Q_v}^s(x) dx =: g_{\hat{W}}^s(x) dx$$

$$\text{mit } g_{\hat{W}}^s(x) > 0, \int_{-\infty}^{+\infty} g_{\hat{W}}^s(x) dx = 1 \quad \text{Daraus folgt}$$

$$0 < \int_a^b g_{\hat{W}}^s(x) dx = \mu_{\hat{W}}^s\{(a, b]\} \leq \mu_{\hat{W}}^s(M)$$

Damit trifft auch Annahme $[B_2]$ in unserem Modell zu.

Seien M und N zwei beliebige Mengen aus $\mathcal{F}$ mit $M \cap N = \emptyset$ und $\mu_u^s(M \cup N) > 0$ für mindestens ein Maß μ_u^s . Dann gibt es o.B.d.A. ein

Intervall $(a, b] \subseteq M$ mit $\mu_u^s\{(a, b]\} > 0$. Nach Konstruktion des Modells

existiert nun eine Zerlegung des $\hat{R}$, $\hat{R} = m_R^u + m_P^u + m_S^u$ mit

$\text{Sp}(P) = 1$ und $(a, b] = m_P^u$. Nach (59) gilt dann

$$\mu_P^u\{(a, b]\} = \mu_P^u(M) = 1 \quad \text{und} \quad \mu_P^u(\hat{R} \setminus (a, b]) = \mu_P^u(N) = 0$$

also insbesondere $\mu_P^u(M) \neq \mu_P^u(N)$. Damit ist gezeigt, daß das oben angegebene Modell alle Eigenschaften der Annahmen-Kombination $\langle\langle 3.3, 2 \rangle\rangle$ besitzt.

Modell zu $\langle\langle 3.3, 3 \rangle\rangle$

Die Modelle zu $\langle\langle 3.3, 2 \rangle\rangle$ und $\langle\langle 3.3, 3 \rangle\rangle$ müssen sich mindestens dadurch unterscheiden, daß die im Modell zu $\langle\langle 3.3, 2 \rangle\rangle$ noch gültige Eigenschaft $[B_2]$ im Modell zu $\langle\langle 3.3, 3 \rangle\rangle$ verletzt ist. Um diesen Unterschied zu erreichen, können wir aber das Modell $\langle\langle 3.3, 2 \rangle\rangle$ bis auf eine kleine Änderung beibehalten. Diese Änderung, die gerade Eigenschaft $[B_2]$ zerstört, besteht darin, daß wir ein einziges Maß anders definieren:

Dazu betrachten wir einen beliebigen extrem unscharfen Makrozustand $\hat{W}_1^s$ mit $\hat{W}_1 = \sum_{v=1}^{\dim \mathcal{H}} \lambda_v R_v$, $\text{Sp}(R_v) = 1$, $1^s = \sum_v R_v$, $\lambda_v > 0$, $\sum_v \lambda_v = 1$

Nach Konstruktion ist $\mathcal{M}_{R_1}^s = (a, b]$. Abweichend von (59) setzen wir nun fest

$$d\mu_{R_1}^s = \chi_{\left\{ (a, \frac{b-a}{2}] \right\}} f_{R_1}^s(x) dx; \quad f_{R_1}^s > 0, \quad \int_a^{\frac{b-a}{2}} f_{R_1}^s dx = 1 \quad (61)$$

Daraus folgt

$$\mu_{R_1}^s \left\{ R \setminus (a, \frac{b-a}{2}] \right\} = \mu_{R_1}^s \left\{ (\frac{b-a}{2}, b] \right\} = 0 \quad (62)$$

Nun wählen wir ein beliebiges Intervall $(c, d]$ mit $\frac{b-a}{2} < c < d \leq b$ und betrachten die dem Intervall $(c, d]$ entsprechende Proposition P^u mit

$$\mathcal{M}_P^u = (c, d]. \quad \text{Offensichtlich gilt } \mathcal{M}_P^u \in \mathcal{F}, \quad \mu_P^u(\mathcal{M}_P^u) = 1$$

aber

$$\mu_{\hat{W}_1}^s(\mathcal{M}_P^u) \leq \mu_{\hat{W}_1}^s \left\{ (\frac{b-a}{2}, b] \right\} = \lambda \mu_{R_1}^s \left\{ (\frac{b-a}{2}, b] \right\} = 0$$

d.h. Annahme $[B_2]$ ist durch die Abänderung (61) tatsächlich verletzt worden, während die beiden übrigen Eigenschaften des Modells zu $((3.3, 2))$, $[A_1]$ und $[B_3]$, durch die Änderung nicht betroffen werden. Damit haben wir ein Modell zu der Annahmenkombination $((3.3, 3))$ konstruiert.

Modell zu $((3.3, 4))$

Wir geben zunächst ein sehr einfaches Modell für den Fall eines endlich dimensionalen Hilbertraumes an, $\dim \mathcal{H} = Z < \infty$. Als Raum Ω wählen wir die gelochte Einheitskreisscheibe $\mathcal{C}$. Jeder Zerlegung der Einheit ordnen wir mit Hilfe einer beliebigen surjektiven Abbildung

$\mathcal{J} \xrightarrow{\Psi} [0, \frac{2\pi}{Z})$ der Menge aller Zerlegungen der Einheit auf das Intervall $[0, \frac{2\pi}{Z})$ eine Zerlegung von $\mathcal{C}$ in Sektoren zu:
Ist $1^\alpha = \sum_{v=1}^M P_v$, $\text{Sp}(P_v) = g_v$, $\sum_{v=1}^M g_v = Z$ eine beliebige Zerlegung der Einheit, so definieren wir mit

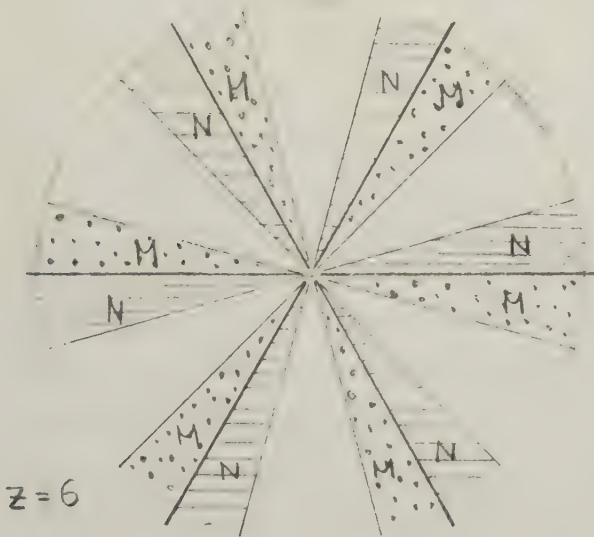
$$\mathcal{M}_{P_v}^\alpha = \left\{ (\tau, \varphi) \in \mathcal{C} \mid 0 < \tau \leq 1; \sum_{i=0}^{v-1} \frac{2\pi}{Z} g_i < \varphi + \varphi(\alpha) \leq \sum_{i=0}^v \frac{2\pi}{Z} g_i \right\} \quad (63)$$

Da die Menge aller Zerlegungen der Einheit die gleiche Mächtigkeit besitzt wie die Menge aller Zerlegungen (63) von $\mathcal{C}$, können wir die Konstruktion so einrichten, daß alle Sektoren von der "richtigen" Öffnung auch als Mengen $\mathcal{M}_P^\alpha$ auftreten.

Jeder Proposition Q^ε - bzw. dem zugehörigen Makrozustand $\hat{W}_Q^\varepsilon$ - ordnen wir nun ein Maß $d\mu_Q^\varepsilon = \chi(\mathcal{M}_Q^\varepsilon) k_Q^\varepsilon d\varphi$ (64) zu, bei dem die

Konstante $k_2^{\varepsilon} > 0$ die Normierung des Maßes garantiert. Entsprechend definieren wir die Maße zusammengesetzter Makrozustände als Summe der Maße der Summanden.

In diesem Modell gelten offensichtlich die Annahmen $[A_1]$ und $[B_2]$, während $[A_2]$ und $[B_1]$ verletzt sind. Nun wählen wir eine beliebige Zerlegung der Einheit $\mathcal{G}$ in elementare Projektionsoperatoren $1^{\mathcal{G}} = \sum_{i=1}^Z P_i$ und betrachten die in nebenstehender Skizze definierten Mengen M und N .



Beide Mengen bestehen aus je Z Sektoren der Öffnung $\frac{1}{4} \frac{2\pi}{Z}$ und diese Z Sektoren sind jeweils ringsum an der gleichen Seite der Sektorengrenzlinien der Zerlegung $\mathcal{G}$ angebracht. M und N liegen offensichtlich in $\mathcal{F}$ und $M \cap N = \emptyset$; außerdem gilt $\mu_u^{\mathcal{S}}(M \cup N) > 0$ für alle $u^{\mathcal{S}}$ mit $u \neq 0$. Darüber hinaus gilt für einen beliebigen Sektor $\mathcal{S}$ des Winkels $\frac{2\pi}{Z} m$ ($m = 0, 1, 2, \dots, Z$) die Beziehung

$$\text{Winkelmaß} (M \cap \mathcal{S}) = \text{Winkelmaß} (N \cap \mathcal{S}) \quad (65)$$

Aus (64) und (65) ergibt sich dann $\mu_w^{\varepsilon}(M) = \mu_w^{\varepsilon}(N) \quad \forall w^{\varepsilon}$ d.h. $[B_3]$ ist verletzt und damit haben wir für $\dim \mathcal{H} < \infty$ das verlangte Modell konstruiert.

Offensichtlich kann man aber diese Konstruktion nur im Fall eines endlich dimensionalen Hilbertraumes durchführen. Wir geben daher nun ein zweites Modell für den Fall eines separablen, unendlichdimensionalen Hilbertraumes an. Zur Konstruktion des Zustandsraumes wählen wir wieder den $\mathcal{R}$. Ähnlich wie im Modell zu (3.3.2) ordnen wir jeder Zerlegung der Einheit eine Zerlegung des $\mathcal{R}$ in "gleich viele" halboffene Intervalle zu, wobei sämtliche Mengen $\mathcal{M}_p^{\alpha}$ eine der drei Formen $(-\infty, a]$; $(a, b]$ oder (b, ∞) besitzen. Dabei definieren wir aber die Zerlegungen des $\mathcal{R}$ derart, daß folgende Beziehungen gelten:

(a) Als Mengen $\mathcal{M}_p^{\alpha}$ treten nur Intervalle $(a, b]$ mit $b - a \geq g > 0$ auf, und alle Intervalle $(a, b]$ mit rationalen Endpunkten und $b - a \geq g$ kommen auch wirklich in $\mathcal{P}$ vor.

(b) Wir wählen vier feste, rationale Punkte $\alpha < \beta < \gamma < \delta$ aus $\mathcal{R}^1$ mit $\delta - \alpha = \frac{1}{2}g$ und setzen $M = (\alpha, \beta]$, $N = (\gamma, \delta]$. Nun richten wir die Defi-

nition der Zerlegungen des $\hat{R}$ so ein, daß für alle Q^ε mit $Sp(Q) < \infty$ gilt:

$$\mathcal{M}_Q^\varepsilon \cap (\alpha, \delta] = \emptyset \text{ oder } (\alpha, \delta] \quad (66)$$

Diese beiden Forderungen lassen sich nur im Fall $\dim \mathcal{H} = \infty$ realisieren, da nur in diesem Fall genügend Mengen $\mathcal{M}_P^\varepsilon$ mit $Sp(P) = \infty$ vorhanden sind, die gegen (66) verstoßen können, um (a) zu erfüllen.

Aus (a) und (b) folgt: $M \cap N = \emptyset$, M und N liegen in $\mathcal{F}$ (67)

Sei nun $Q^\varepsilon / Sp(Q)$ ein beliebiger Makrozustand ($0 < Sp(Q) < \infty$); dann definieren wir

$$d\mu_Q^\varepsilon = \chi_{\mathcal{M}_Q^\varepsilon} f_Q^\varepsilon(x) dx$$

mit

$$0 < f_Q^\varepsilon(x) < \infty, \int_{\mathcal{M}_Q^\varepsilon} f_Q^\varepsilon(x) dx = 1, \mu_Q^\varepsilon(\overline{\mathcal{M}_Q^\varepsilon}) = 0 \quad (68)$$

$$\mu_Q^\varepsilon(M) = \mu_Q^\varepsilon(N) = \begin{cases} 0 \\ 1/10 \end{cases} \iff \begin{cases} M \cup N \subseteq \hat{R} \setminus \mathcal{M}_Q^\varepsilon \\ M \cup N \subseteq \mathcal{M}_Q^\varepsilon \end{cases}$$

Wegen (a) und (b) lassen sich stets Funktionen $f_Q^\varepsilon(x)$ finden, die Beziehung (68) erfüllen. Ähnlich wie in Modell ((3.3,2)) gelten auch in diesem Modell die Eigenschaften $[A_1]$ und $[B_2]$, während $[A_2]$ und $[B_1]$ verletzt sind. Aus (67), (68), (a), (b) und $[A_1]$ folgt außerdem, daß auch $[B_3]$ in diesem Modell verletzt ist. Damit ist auch Aussage ((3.3,4)) bewiesen.

Modell zu ((3.3,5))

Im Modell zu ((3.3,5)) soll von allen Annahmen nur noch $[A_1]$ zutreffen. Um das zu erreichen, wollen wir das letzte Modell leicht abwandeln, so daß es auch noch die Eigenschaft $[B_2]$ verliert. Als Raum dient wieder $\hat{R}$. Jeder Zerlegung der Einheit entspricht eine Zerlegung des $\hat{R}$ in halboffene Intervalle der Mindestlänge $q > 0$, und jedes Intervall $(a, b]$ mit rationalen Endpunkten und $b - a \geq q$ kommt auch wirklich in $\mathcal{P}$ vor. Nun greifen wir uns ein bestimmtes Intervall $\mathcal{M}_K^\varepsilon = (p, q]$, $Sp(K) < \infty$ heraus und wählen zwei Intervalle $M = (\alpha, \beta]$ und $N = (\gamma, \delta]$ mit

$$p < \alpha < \beta < \gamma < \delta < q \quad \text{und} \quad \delta - \alpha = \frac{q}{2} \quad \text{aus} \quad \mathcal{M}_K^\varepsilon.$$

Es gilt also $M \cap N = \emptyset$, $M \cup N \subseteq (\alpha, \delta] \subseteq \mathcal{M}_K^\varepsilon$

Zu allen Makrozuständen $(+ W_K^\varepsilon)$ definieren wir entsprechende Maße

$$d\mu_Q^\varepsilon = \chi_{\{\mathcal{M}_Q^\varepsilon \cap (\hat{R} \setminus (\alpha, \delta])\}} f_Q^\varepsilon(x) dx \quad (69)$$

mit

$$0 < f_Q^\varepsilon < \infty \quad \text{und} \quad \int_{\mathcal{M}_Q^\varepsilon \cap (\hat{R} \setminus (\alpha, \delta])} f_Q^\varepsilon(x) dx = 1$$

Für den Makrozustand W_K^σ setzen wir dagegen fest

$$d\mu_K^\sigma = ch(\pi_K^\sigma) f_K^\sigma(x) dx \quad \text{mit } 0 < f_K^\sigma(x) < \infty$$

$$\int_P^q f_K^\sigma(x) dx = \mu_K^\sigma(\pi_K^\sigma) = 1 \quad ; \quad \int_\alpha^\beta f_K^\sigma(x) dx = \int_\sigma^\delta f_K^\sigma(x) dx = \frac{1}{10} \quad (70)$$

Aus (69) und (70) ergibt sich also:

$$\mu_K^\sigma(M) = \mu_K^\sigma(N) > 0 \quad ; \quad \mu_W^\varepsilon(M) = \mu_W^\varepsilon(N) = 0 \quad \forall W^\varepsilon \neq W_K^\sigma$$

Damit ist Eigenschaft $[B_3]$ in unserem Modell verletzt. Man sieht unmittelbar $\mu_W^\varepsilon(M \cup N) = 0$ für alle W^ε mit $\varepsilon \neq \sigma$, so daß auch $[B_2]$ verletzt ist. $[B_1]$ und $[A_2]$ sind trivialerweise ebenfalls verletzt. Man überzeugt sich aber leicht davon, daß Annahme $[A_1]$ in diesem Modell gilt.

Damit ist auch Aussage (3.3) vollständig bewiesen. Abschließend wollen wir uns noch davon überzeugen, daß wir in Satz (3) auch wirklich alle sinnvollen Kombinationen der Annahmen $[A_1]$ bis $[B_3]$ untersucht haben. Unter sinnvoll (im Rahmen der VWSTh) verstehen wir dabei alle Kombinationen, die $[A_1]$ enthalten; denn $[A_1]$ legt gewissermaßen die mathematische Grundlage der VWSTh und ermöglicht überhaupt erst die Formulierung der übrigen Annahmen. Fordern wir aber $[A_1]$ für alle Kombinationen, so folgt aus (2.2.1), daß als sinnvolle und verträgliche Annahmenkombinationen nur noch solche mit $[A_1] \wedge \neg[B_1]$ in Frage kommen. Unter dieser Voraussetzung bleiben dann noch $2^3 = 8$ mögliche Kombinationen übrig. Von diesen acht sind nun die folgenden drei Kombinationen

$[A_1] \wedge [A_2] \wedge \neg[B_1] \wedge ([B_2] \vee [B_3])$ nach Aussage (3.1) unverträglich, da sie sowohl $[B_1]$ als auch $\neg[B_1]$ enthalten. So bleiben schließlich als "untersuchungswürdig" gerade die fünf Kombinationen übrig, die wir in (3.3) behandelt haben. Damit ist Satz (3) vollständig bewiesen.

Beweis zu Satz (4)

ad (a) Aus (4.14) und (4.21) ergebensich folgende Eigenschaften der Funktionen ${}^\circ F_\lambda^\alpha$

(1) ${}^\circ F_\lambda^\alpha$ kann nur die Werte 0 oder 1 annehmen

$$(2) \lambda \leq \mu \Rightarrow {}^0F_\lambda^\alpha \leq {}^0F_\mu^\alpha$$

$$(3) {}^0F_\lambda^\alpha(x) = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases} \Leftrightarrow \|x(\langle \alpha \rangle)\|^2 \leq \text{Sp}(F_\lambda P(x(\langle \alpha \rangle)))$$

Aus (1) und (2) folgt ${}^0F_\lambda^\alpha(x) = \Theta_+(\lambda - g(x)) = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases} \Leftrightarrow \lambda \geq g(x)$ (71)
und aus (71) und (4.22) ergibt sich

$$K_\alpha = \int \lambda dF_\lambda \Rightarrow g(x) = {}^0K_\alpha^\alpha(x) \quad \text{und}$$

$$A = \int a(\lambda) dF_\lambda \Rightarrow {}^0A^\alpha = a[g(x)] = a[{}^0K_\alpha^\alpha(x)] \quad (72)$$

Halten wir nun in (3) x fest und variieren λ , so ist der Sprungpunkt der Funktion $\text{Sp}(F_\lambda P)$ offensichtlich Wachstumspunkt der Spektralschar α , d.h. $g(x)$ liegt im Spektrum des Operators $K_\alpha = \int \lambda dF_\lambda$. Ist umgekehrt ζ ein beliebiger Punkt aus dem Spektrum von K_α , so ist ζ Wachstumspunkt von $\text{Sp}(F_\lambda Q)$ für unendlich viele elementare Projektionsoperatoren Q und folglich gibt es unendlich viele Punkte $z \in \Omega$ mit

$$Q = Q(z(\langle \alpha \rangle)) \quad \text{und} \quad \|z(\langle \alpha \rangle)\|^2 = \text{Sp}(F_\zeta Q)$$

Für diese Punkte gilt aber dann ${}^0F_\lambda^\alpha(z) = \Theta_+(\lambda - \zeta)$ und folglich ${}^0K_\alpha^\alpha(z) = \zeta$. Damit haben wir gezeigt, daß der Wertebereich von ${}^0K_\alpha^\alpha$ gleich dem Spektrum von K_α ist, und das bedeutet nach (72), daß auch der Wertebereich der Observablenwertfunktion ${}^0A^\alpha$ identisch ist mit dem Spektrum des Operators A .

ad (b) Die $(\Omega, \mathcal{L})$ -Meßbarkeit aller Funktionen ${}^0F_\lambda^\alpha$ ergibt sich direkt aus ihrer Konstruktion (4.21); und nach (4.22) sind damit auch alle Observablenwertfunktionen ${}^0A^\alpha$ $(\Omega, \mathcal{L})$ -meßbar. Die Gültigkeit der Beziehung $f({}^0A^\alpha) = {}^0f(A)^\alpha$ ergibt sich danach ohne Schwierigkeiten aus Lemma (3.1) und Teil (a) dieses Satzes.

ad (c) Für die in (4.16) definierten Maße $\nu_Q^{\langle \alpha \rangle}$ ergibt sich

$$\begin{aligned} \nu_Q^{\langle \alpha \rangle}(\mathcal{M}_{F_S}^\alpha) &= \frac{1}{\pi} \mathcal{M}(\{x \in \mathcal{L}_{\langle \alpha \rangle} \mid 0 < \|x\|^2 \leq \text{Sp}(F_S P(x))\} \cap L(Q)) \\ &= \frac{1}{\pi} \mathcal{M}\{x \in L(Q) \mid 0 \leq \|x\|^2 \leq \text{Sp}(F_S Q)\} = \frac{1}{\pi} \mathcal{M}\{\text{Kreisbogen} \subseteq \mathcal{L}, r^2 = \text{Sp}(Q F_S)\} \end{aligned}$$

$= \text{Sp}(Q F_S)$. Für einen beliebigen Makrozustand W^ε folgt dann aus (4.18)

$$\nu_{W^\varepsilon}^{\langle \alpha \rangle}(\mathcal{M}_{F_S}^\alpha) = \sum_n \lambda_n \text{Sp}(G_n F_S) = \text{Sp}(F_S \sum_n \lambda_n G_n) = \text{Sp}(F_S W)$$

und aus (4.19) bis (4.21) erhalten wir

$$\mu_W^\varepsilon(\pi_{\mathbb{T}_\beta}^\alpha) = \int_{\Sigma} {}^\circ \mathbb{T}_\beta^\alpha(x) d\mu_W^\varepsilon = \text{Sp}(\mathbb{T}_\beta W)$$

Aus (4.22) ergibt sich schließlich

$$\int_{\Sigma} {}^\circ A^\alpha d\mu_W^\varepsilon = \int_{-\infty}^{+\infty} a(\lambda) d \int_{\Sigma} {}^\circ \mathbb{T}_\lambda^\alpha d\mu_W^\varepsilon = \int a(\lambda) d \text{Sp}(W \mathbb{T}_\lambda) = \text{Sp}(AW)$$

ad (d) Die Eineindeutigkeit und Stetigkeit der Punkttransformation T ergibt sich auf Grund der Definitionen (4.23) und (4.24) unmittelbar aus den entsprechenden Eigenschaften der (T definierenden) unitären Transformation U . Es sei nun $\alpha = (\mathbb{T}_\lambda)$, $E_\lambda = U^\dagger \mathbb{T}_\lambda U$, $\bar{u}(\omega) = \beta = (E_\lambda)$ dann folgt aus der Definition von $P(x)$

$$\text{Sp}(E_\lambda P(x)) = \text{Sp}(U^\dagger \mathbb{T}_\lambda U P(x)) = \text{Sp}(\mathbb{T}_\lambda \cdot U P(x) U^\dagger) = \text{Sp}(\mathbb{T}_\lambda P(\tilde{u}(x)))$$

für alle $x \in \mathcal{L}$, und wir erhalten aus (4.14)

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_{E_\lambda}^{\bar{u}(\omega)} &= \{x \in \mathcal{L}_{\omega} \mid 0 < \|x\|^2 \leq \text{Sp}(E_\lambda P(x))\} \\ &= \{x \in \mathcal{L}_{\omega} \mid 0 < \|x\|^2 \leq \text{Sp}(\mathbb{T}_\lambda P(\tilde{u}_{\omega}(x)))\} \\ &= \{\tilde{u}_{\omega}^{-1} y \in \mathcal{L}_{\omega} \mid 0 < \|\tilde{u}_{\omega}^{-1} y\|^2 \leq \text{Sp}(\mathbb{T}_\lambda P(y))\} \\ &= \{\tilde{u}_{\omega}^{-1} y \in \mathcal{L}_{\omega} \mid 0 < \|y\|^2 \leq \text{Sp}(\mathbb{T}_\lambda P(y))\} = \tilde{u}_{\omega}^{-1} \mathcal{N}_{\mathbb{T}_\lambda}^\alpha \end{aligned}$$

Aus (4.21) ergibt sich damit

$$T^{-1} \mathcal{N}_R^\alpha = \mathcal{N}_{U^\dagger R U}^{\bar{u}(\omega)} \quad \text{und} \quad {}^\circ E_\lambda^{\bar{u}(\omega)}(x) = {}^\circ \mathbb{T}_\lambda^\alpha(Tx) \quad (73)$$

Aus $A = \int a(\lambda) d\mathbb{T}_\lambda$ folgt $U^\dagger A U = \int a(\lambda) dE_\lambda$ und wir erhalten aus (73)

$${}^\circ (U^\dagger A U)^{\bar{u}(\omega)}(x) = \int a(\lambda) d {}^\circ E_\lambda^{\bar{u}(\omega)} = \int a(\lambda) d {}^\circ \mathbb{T}_\lambda^\alpha(Tx) = {}^\circ A^\alpha(Tx) \quad (74)$$

Aus der Eineindeutigkeit von T und aus (73) ergibt sich außerdem die $(\mathcal{Q}, \mathcal{L})$ -Meßbarkeit von T und T^{-1} .

Um (4.27) zu beweisen, zeigen wir zunächst für $\alpha, \beta \in \mathcal{Q}$

$$\nu_{u \otimes u^\dagger}^{\langle \omega \rangle}(\mathcal{N}_R^\alpha \cap \mathcal{N}_S^\beta) = \frac{1}{\|u\|^2} \mu(\mathcal{N}_R^\alpha \cap \mathcal{N}_S^\beta \cap L(u \otimes u^\dagger)) =$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{\pi} \tilde{m}^2 \left\{ x \in L(uqu^+) \mid \begin{array}{l} \text{Sp}(F_\lambda uqu^+) \\ \text{Sp}(D_\lambda uqu^+) \end{array} < \|x\|^2 \leq \begin{array}{l} \text{Sp}(F_\mu uqu^+) \\ \text{Sp}(D_\mu uqu^+) \end{array} \right\} \\
 &= \frac{1}{\pi} \tilde{m}^2 \left\{ \tilde{u}_{\langle \alpha \rangle}^{-1} \in L(Q) \mid \begin{array}{l} \text{Sp}(u^+ F_\lambda u \cdot Q) \\ \text{Sp}(u^+ D_\lambda u \cdot Q) \end{array} < \|\tilde{u}_{\langle \alpha \rangle}^{-1} x\|^2 \leq \begin{array}{l} \text{Sp}(u^+ F_\mu u \cdot Q) \\ \text{Sp}(u^+ D_\mu u \cdot Q) \end{array} \right\} \\
 &= \frac{1}{\pi} \tilde{m}^2 \left\{ y \in L(Q) \mid \begin{array}{l} \text{Sp}(u^+ F_\lambda u Q) \\ \text{Sp}(u^+ D_\lambda u Q) \end{array} < \|y\|^2 \leq \begin{array}{l} \text{Sp}(u^+ F_\mu u Q) \\ \text{Sp}(u^+ D_\mu u Q) \end{array} \right\} \\
 &= \frac{1}{\pi} \tilde{m}^2 \left(\mathcal{N}_{u^+ R u}^{\bar{u}(\alpha)} \cap \mathcal{N}_{u^+ S u}^{\bar{u}(\beta)} \cap L(Q) \right) = \frac{1}{\pi} \tilde{m}^2 \left(\tilde{u}_{\langle \alpha \rangle}^{-1} \mathcal{N}_R^\alpha \cap \tilde{u}_{\langle \alpha \rangle}^{-1} \mathcal{N}_S^\beta \cap L(Q) \right) \\
 &= \mathcal{V}_Q^{\langle \alpha \rangle} \left\{ \tilde{u}_{\langle \alpha \rangle}^{-1} (\mathcal{N}_R^\alpha \cap \mathcal{N}_S^\beta) \right\}
 \end{aligned}$$

Mit der gleichen Begründung erhalten wir auch entsprechende Beziehungen für Mengen der Art $\mathcal{N}_R^\alpha \cup \mathcal{N}_S^\beta$ und $\overline{\mathcal{N}}_R^\alpha = \mathcal{L}_{\langle \alpha \rangle} \setminus \mathcal{N}_R^\alpha = \mathcal{N}_{I-R}^\alpha$. Mit anderen Worten, es gilt $\mathcal{V}_{uqu^+}^{\langle \alpha \rangle}(M) = \mathcal{V}_Q^{\langle \alpha \rangle}(\tilde{u}_{\langle \alpha \rangle}^{-1} M)$ (75) für alle Elemente M der (von allen Mengen $\mathcal{N}_R^\alpha$ mit $\alpha \in \langle \alpha \rangle$ erzeugten) Algebra $\mathcal{F}_{\langle \alpha \rangle}$. Da sich ein Maß auf einer Algebra $\mathcal{L}$ aber nur auf eine Weise zu einem Maß auf der von $\mathcal{L}$ erzeugten σ -Algebra $\sigma\mathcal{L}$ fortsetzen läßt, gilt (75) ebenfalls für alle $M \in \mathcal{F}_{\langle \alpha \rangle}$. Auf Grund der Beziehungen (4.20) und (4.21) ergibt sich hieraus unmittelbar die Folgerung $\mu_{uqu^+}^{u(\varepsilon)}(M) = \mu_w^\varepsilon(T^{-1}M)$ (76) für alle eindimensionalen Zylindermengen der Form $M = \mathcal{N} \times \prod_{\substack{\langle \beta \rangle \in \mathcal{L}_{\langle \beta \rangle} \\ \langle \beta \rangle \neq \langle \alpha \rangle}} \mathcal{L}_{\langle \beta \rangle}$ und $\mathcal{N} \in \mathcal{F}_{\langle \alpha \rangle}$.

Um die Gültigkeit von (76) auf ganz $\mathcal{L}$ auszudehnen, langt es wieder, sie für Durchschnitt und Vereinigung zweier Mengen $\mathcal{N}_R^\alpha$ und $\mathcal{N}_S^\beta$ zu beweisen. Für $M = \mathcal{N}_R^\alpha \cap \mathcal{N}_S^\beta$ und $\langle \alpha \rangle = \langle \beta \rangle$ folgt die Beziehung

$$\mu_{uqu^+}^{u(\varepsilon)}(M) = \mu_w^\varepsilon(T^{-1}M) \quad \text{bereits aus (76). Für } \langle \alpha \rangle \neq \langle \beta \rangle \text{ erhalten wir}$$

$$\begin{aligned}
 \mu_{uqu^+}^{u(\varepsilon)}(\mathcal{N}_R^\alpha \cap \mathcal{N}_S^\beta) &= \mathcal{V}_{uqu^+}^{u(\varepsilon)}(\mathcal{N}_R^\alpha) \cdot \mathcal{V}_{uqu^+}^{u(\varepsilon)}(\mathcal{N}_S^\beta) \\
 &= \mathcal{V}_Q^{\langle \alpha \rangle}(\tilde{u}_{\langle \alpha \rangle}^{-1} \mathcal{N}_R^\alpha) \cdot \mathcal{V}_Q^{\langle \beta \rangle}(\tilde{u}_{\langle \beta \rangle}^{-1} \mathcal{N}_S^\beta) = \mu_w^\varepsilon(T^{-1} \mathcal{N}_R^\alpha) \cdot \mu_w^\varepsilon(T^{-1} \mathcal{N}_S^\beta) \\
 &= \mu_w^\varepsilon\{T^{-1} \mathcal{N}_R^\alpha \cap T^{-1} \mathcal{N}_S^\beta\} = \mu_w^\varepsilon\{T^{-1}(\mathcal{N}_R^\alpha \cap \mathcal{N}_S^\beta)\} \quad (77)
 \end{aligned}$$

Für die Vereinigung $\mathcal{M}_R^\alpha \cup \mathcal{M}_S^\beta$ gilt:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_R^\alpha \cup \mathcal{M}_S^\beta &= \left\{ (\mathcal{M}_R^\alpha \times \mathcal{L}_{\langle \beta \rangle}) \cup (\mathcal{M}_S^\beta \times \mathcal{L}_{\langle \alpha \rangle}) \times \prod_{\langle \rho \rangle \neq \langle \alpha \rangle, \langle \beta \rangle} \mathcal{L}_{\langle \rho \rangle} \right\} \\ &= \left\{ 2(\mathcal{M}_R^\alpha \times \mathcal{M}_S^\beta) \cup (\mathcal{M}_{A-R}^\alpha \times \mathcal{M}_S^\beta) \cup (\mathcal{M}_R^\alpha \times \mathcal{M}_{A-S}^\beta) \times \prod \mathcal{L}_{\langle \rho \rangle} \right\} \\ &= 2(\mathcal{M}_R^\alpha \cap \mathcal{M}_S^\beta) \cup (\mathcal{M}_{A-R}^\alpha \cap \mathcal{M}_S^\beta) \cup (\mathcal{M}_R^\alpha \cap \mathcal{M}_{A-S}^\beta) \end{aligned}$$

Die gesuchte Beziehung für $\mathcal{M}_R^\alpha \cup \mathcal{M}_S^\beta$ läßt sich also auf Gl (77) zurückführen. Damit ist Gl (76) für alle $M \in \mathcal{L}$ gezeigt und Teil (d) von Satz (4) bewiesen.

ad (e) Auf Grund der Konstruktion der Punkttransformation T übertragen sich alle Eigenschaften, die eine Menge $\{U_t\}$ von unitären Transformationen in $\mathcal{H}$ zu einer einparametrischen kontinuierlichen Gruppe machen, unmittelbar auf die zugeordnete Menge $\{T_t\}$ von Punkttransformationen in $\mathcal{L}$; folglich stellt die Menge $\{T_t\}$ ebenfalls eine einparametrische kontinuierliche Gruppe dar.

$$\begin{aligned} d(T_{t_1}x, T_{t_2}x) &= \sup_{\langle \alpha \rangle \in \Lambda^*} \left\| \tilde{U}_{\langle \alpha \rangle t_1} x(\langle \alpha \rangle) - \tilde{U}_{\langle \alpha \rangle t_2} x(\langle \alpha \rangle) \right\| \\ &= \sup_{\langle \alpha \rangle \in \Lambda^*} \left\| U_{t_1} |x(\langle \alpha \rangle)\rangle - U_{t_2} |x(\langle \alpha \rangle)\rangle \right\|_{\mathcal{H}} \\ &\leq \sup_{\substack{|x\rangle \in \mathcal{H} \\ \langle x|x\rangle = 1}} \left\| (U_{t_1} - U_{t_2}) |x\rangle \right\| = \|U_{t_1} - U_{t_2}\| \end{aligned}$$

Und damit ergibt sich

$$\lim_{|t_1 - t_2| \rightarrow 0} d(T_{t_1}x, T_{t_2}x) = 0$$

Mit Hilfe von (73) erhält man (bei $R = F_6 - F_\lambda$)

$$\begin{aligned} \mu_w^2(T_{t_1}^{-1} \mathcal{M}_R^\alpha \Delta T_{t_2}^{-1} \mathcal{M}_R^\beta) &= \mu_w^2(\mathcal{M}_{U_{t_1}^+ R U_{t_1}}^{U_{t_1}(\alpha)} \Delta \mathcal{M}_{U_{t_2}^+ R U_{t_2}}^{U_{t_2}(\beta)}) \\ &= \nu_w^2(\mathcal{M}_{U_{t_1} R U_{t_1}}^{\tilde{U}_{t_1}(\alpha)} \Delta \mathcal{M}_{U_{t_2} R U_{t_2}}^{\tilde{U}_{t_2}(\beta)}) = \sum_n \lambda_n \nu_{G_n}^{\langle \alpha \rangle}(\dots) \\ &= \frac{1}{\pi} \sum_n \lambda_n \sum \left\{ x \in \mathcal{L}(G_n) \mid \left\{ \begin{aligned} &\text{Sp}[G_n U_{t_1}^+ F_\lambda U_{t_1}] < \|x\|^2 \leq \text{Sp}[G_n U_{t_1}^+ F_6 U_{t_1}] \\ &\Delta \left\{ \begin{aligned} &\text{Sp}[G_n U_{t_2}^+ F_\lambda U_{t_2}] < \|x\|^2 \leq \text{Sp}[G_n U_{t_2}^+ F_6 U_{t_2}] \end{aligned} \right\} \end{aligned} \right\} \right\} \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich nun unmittelbar

$$\lim_{|t_1 - t_2| \rightarrow 0} \mu_w^\varepsilon (T_{t_1}^{-1} \mathcal{M}_R^\alpha \Delta T_{t_2}^{-1} \mathcal{M}_R^\alpha) = 0 \quad \forall w^\varepsilon, R^\alpha \quad (78)$$

Aus den Mengenrelationen

$$(M_1 \cup M_2) \Delta (N_1 \cup N_2) \subseteq (M_1 \Delta N_1) \cup (M_2 \Delta N_2)$$

folgt weiter

$$\begin{aligned} & \mu_w^\varepsilon \{ T_{t_1}^{-1} (\mathcal{M}_R^\alpha \cup \mathcal{M}_S^\beta) \Delta T_{t_2}^{-1} (\mathcal{M}_R^\alpha \cup \mathcal{M}_S^\beta) \} \\ & \leq \mu_w^\varepsilon (T_{t_1}^{-1} \mathcal{M}_R^\alpha \Delta T_{t_2}^{-1} \mathcal{M}_R^\alpha) + \mu_w^\varepsilon (T_{t_1}^{-1} \mathcal{M}_S^\beta \Delta T_{t_2}^{-1} \mathcal{M}_S^\beta) \quad (79) \end{aligned}$$

Eine Kombination der Gleichungen (78) und (79) ergibt schließlich das Resultat

$$\lim_{|t_1 - t_2| \rightarrow 0} \mu_w^\varepsilon (T_{t_1}^{-1} M \Delta T_{t_2}^{-1} M) = 0$$

für alle Elemente M aus der von allen Mengen $\mathcal{M}_R^\alpha$ erzeugten Algebra $\mathcal{F}$.
Damit ist Satz (4) vollständig bewiesen.

8. Anmerkungen

[2.1] Für eine ausführliche Darstellung der mathematischen Grundlagen der WSTh verweisen wir auf eine frühere Arbeit¹¹⁾ sowie auf die dort angegebene Literatur.

[2.2] (a) Observablenwertfunktionen $\mathcal{A}_W(x)$ werden durch Gl (2.4) offensichtlich nur für Operatoren mit diskretem Spektrum definiert; und im Rahmen des mathematischen Formalismus der WSTh läßt sich diese Definition auch nicht für beliebige Operatoren verallgemeinern. Wiener und Siegel haben dieses Problem dadurch umgangen, daß sie eine Observable mit nicht diskretem Wertebereich durch eine - experimentell von ihr nicht unterscheidbare - Observable mit beliebig feinem, aber diskretem Wertebereich ersetzen.

(b) Wiener und Siegel haben noch andere Definitionen^{8,9)} der Observablenwertfunktionen angegeben. In einer Arbeit⁹⁾ haben sie dabei auch die eindeutige Zuordnung zwischen Observablen und Operatoren aufgegeben, um die Eindeutigkeit der Observablenwertfunktionen zu retten. Dabei handelte es sich aber um eine rein mathematisch motivierte Definition, die den physikalischen Vorstellungen der WSTh widersprach und in der jüngsten Darstellung¹⁰⁾ der WSTh auch wieder - zugunsten der mathematisch einfacheren Definition (2.4) - aufgegeben wurde.

[2.3] Auf diesen Mangel der WSTh hat als erster J. Schwartz²²⁾ aufmerksam gemacht. A. Siegel ging in seiner jüngsten Darstellung¹⁰⁾ der WSTh auf diese Kritik ein und schlug eine Verbesserung der WSTh vor, die aber völlig unzureichend ist: Erstens berücksichtigt sie nur diesen einen Mangel der WSTh und zweitens gibt sie dafür auch noch die Stetigkeit der zeitlichen Entwicklung der Mikrozustände preis.

[3.1] Um der größeren Anschaulichkeit willen haben wir uns in dieser Annahme auf Observable mit diskretem Wertebereich beschränkt. Obwohl diese Beschränkung in Anbetracht der stark operativen Observablenkonzeption der VWSTh sicher berechtigt ist, werden wir diese Beschränkung im endgültigen Axiomensystem der WSTh wieder aufheben.

[3.2] In dieser Annahme fehlt noch die Definition der Zerlegung der Einheit, die dem - bei der Reduktion des Zustandsoperators entstehenden - neuen Zustandsoperator zukommt. Die physikalischen Vorstellungen der

VWSTh bestimmen die gesuchte Zerlegung der Einheit nicht eindeutig, legen aber folgende einfache Vorschrift nahe:

Ist W^ε ein beliebiger Zustandsoperator und A^α eine beliebige Observable mit der Zerlegung der Einheit $1^\alpha = \sum_i Q_i$, so gehört zu dem reduzierten Zustandsoperator $\frac{P_{A^\alpha=a_k} W P_{A^\alpha=a_k}}{\text{Sp}(W P_{A^\alpha=a_k})}$ die "größte" Zerlegung der Einheit

$$1^\varepsilon = \sum_\nu K_\nu \quad \text{mit der Eigenschaft} \quad Q_i W Q_i = \sum_\nu c_{\nu(i)} K_\nu \quad \forall i.$$

[4.1] Wir betrachten zwei Spektralscharen genau dann als gleich, wenn beide dieselben Projektionsoperatoren enthalten. Durch diese (aus physikalischen Gründen notwendige) Festsetzung wird aber der im Text einer Zerlegung der Einheit $\alpha = (E_\lambda)$ zugeordnete Operator $K_\alpha := \int \lambda dE_\lambda$ mehrdeutig:

Gibt es zu zwei Spektralscharen $\alpha = (E_\lambda)$ und $\beta = (F_\xi)$ eine umkehrbare Funktion $g(\xi)$ mit der Eigenschaft $\int f(\lambda) dE_\lambda = \int f[g(\xi)] dF_\xi$

für alle borelschen Funktionen f , so gilt offensichtlich $E_\lambda = F_{g^{-1}(\lambda)}$ und $F_\xi = E_{g(\xi)}$ und damit $\alpha = \beta$. Aber i.a. ist $\int \lambda dE_\lambda \neq \int \xi dF_\xi$.

Um die mathematischen Überlegungen des Textes zu vereinfachen, verabreden wir daher, daß zu jeder Zerlegung der Einheit nur eine "Parametrisierung" zugelassen wird. Dadurch wird dann auch die Zuordnung $\alpha \mapsto K_\alpha$ eindeutig.

[4.2] Diese zusätzliche Annahme ist natürlich nicht notwendig; sie bedeutet eine zusätzliche Spezialisierung und Vereinfachung des Modells und muß bei Hinzunahme weiterer Axiome wieder aufgegeben werden.

[4.3] Im folgenden verwenden wir einige eigene Bezeichnungen:

$f(x) = 0 \quad \forall x$ bedeutet: $f(x) = 0$ gilt "fast überall" bezüglich aller Maße der VWSTh.

$f(x) = 0 \quad [\mu_w^\varepsilon]$ bedeutet: $f(x) = 0$ gilt "fast überall" bezüglich des Maßes μ_w^ε .

$f(A^\alpha) = 0 \quad \forall \alpha$ bedeutet: $f(A^\alpha) = 0$ gilt für alle Zerlegungen der Einheit $(E_\lambda) = \alpha$, die das Paar (A, α) zum Bild einer Observablen machen, d.h. die eine Spektraldarstellung $A = \int g(\lambda) dE_\lambda$ von A zulassen.

[4.4] Um die vielen Beweise zu Satz (3) übersichtlicher zu gestalten, beschränken wir uns in Satz (3) auf Observable mit rein diskretem Spektrum. Man überlegt sich aber leicht, daß alle Aussagen von Satz (3) auch ohne diese Einschränkung gültig sind.

[4.5] Eine solche Zerlegung können wir z.B. mit Hilfe einer fest vorgegebenen Basis $|a_1\rangle, |a_2\rangle, \dots$ des Hilbertraumes $\mathcal{H}$ konstruieren: Ist $\mathcal{L}(R)$ der Eigenraum des Projektionsoperators $R \neq 0$, so erhalten wir durch eine Hierarchie von Bedingungen

$$N_1 = \left\{ x \in \mathcal{L}(R) \mid \|x\|=1 \mid \operatorname{Im} \langle x | a_1 \rangle = \sup_{y \in \mathcal{L}(R)} \operatorname{Im} \langle y | a_1 \rangle \right\}$$

$$M_i = \left\{ x \in N_i \mid \|x\|=1 \mid \operatorname{Re} \langle x | a_i \rangle = \sup_{y \in N_i} \operatorname{Re} \langle y | a_i \rangle \right\}$$

$$N_i = \left\{ x \in M_{i-1} \mid \|x\|=1 \mid \operatorname{Im} \langle x | a_i \rangle = \sup_{y \in M_{i-1}} \operatorname{Im} \langle y | a_i \rangle \right\}$$

eine monoton fallende Mengenfolge von Teilmengen aus $\mathcal{L}(R)$, deren Durchschnitt $\bigcap_i M_i \cap N_i$ genau ein Einheitsselement $|e_1\rangle$ enthält.

Ist nun der Projektionsoperator $R - |e_1\rangle\langle e_1|$ von Null verschieden, so wiederholen wir das obige Verfahren. Durch eine Folge solcher Schritte kommen wir schließlich zu einer eindeutig bestimmten Zerlegung

$R = \sum_{k=1}^{\dim R} |e_k\rangle\langle e_k|$ jedes Projektionsoperators in elementare Projektionsoperatoren.

[4.6] Um die zu verschiedenen physikalischen Systemen gehörenden (bzw. in verschiedenen Hilberträumen definierten) Operatoren klar unterscheiden zu können, kennzeichnen wir sie im folgenden - wenn nötig - durch einen zusätzlichen Index über dem Operator (z.B. $\bigvee^3 \epsilon$); dabei beziehen sich die Indizes 1, 2, 3 auf Objekt, Instrument bzw. das zusammengesetzte System "Objekt + Instrument".

[5.1] Die Aussagen (3.1) und (3.2.2) lassen sich bei hinreichender Abschwächung von Axiom (1) nicht aufrechterhalten; sie sind aber auch für die Problemstellung dieser Arbeit nicht wesentlich.

Satz (1) läßt sich als Korollar von Satz (3.2.1) auffassen; daher wollen wir ihn in Kapitel 5 nicht noch einmal mit abgeschwächten Voraussetzungen neu formulieren. Außerdem ist Satz (1) in mehr oder minder expliziter Form bereits in den Arbeiten von Bell¹³⁾, Jauch und Piron¹⁷⁾ und

Kamber^{16,18)} enthalten.

[5.2] (a) Wie wir in den Kapiteln 3 und 4 gesehen haben, lassen sich alle Observablen (Observablenwertfunktionen) auf Propositionen (Indikatorfunktionen $\rho^x = \chi_{\mathcal{M}_p^x}$) zurückführen, und alle Annahmen über die Observablenstruktur von Mikrozuständen (i.e. Annahmen über Beziehungen zwischen Observablenwertfunktionen) lassen sich durch äquivalente Annahmen über die Struktur der Menge $\mathcal{S}$ aller Mengen $\mathcal{M}_p^x$ ersetzen.

(b) Um über eine differenzierte und präzisere Ausdrucksweise zu verfügen, machen wir im folgenden einen feinen Unterschied zwischen den (sonst synonym gebrauchten) Begriffen "Proposition" und "Zustandseigenschaft": Unter einer "Proposition" verstehen wir eine tatsächlich beobachtbare (operativ eindeutig definierte) Zustandseigenschaft (i.e. im Rahmen der VWSTh eine Observable A^x mit $A^x \leq A$ und $0 < A < 1$). Die Menge $\sum$ der "Zustandseigenschaften" umfaßt nun außer den Propositionen noch die beiden "idealen", operativ nicht eindeutig definierten Zustandseigenschaften $\mathbb{O}$ und $\mathbb{I}$.

[5.3] Definition Unter einer "semiboolschen Algebra" verstehen wir eine halbgeordnete Menge mit Involution $(S, \leq, \perp)$, in der genau eine Verträglichkeitsrelation $\sim$ existiert mit den Eigenschaften

- (1) $\sim$ ist symmetrisch
- (2) $a \leq b \Rightarrow a \sim b$
- (3) Ist $B \subseteq S$ eine Boolesche Algebra (bezgl. $\leq$), so sind alle Elemente aus B verträglich
- (4) Zu jeder Teilmenge M von S existiert eine Boolesche Algebra B (bezgl. $\leq$) mit $M \subseteq B \subseteq S$

Die Struktur einer semiboolschen Algebra ist u.E. die stärkste Struktur, die sich ohne stark generalisierende oder zweifelhafte Annahmen von der Menge aller Zustandseigenschaften eines physikalischen Systems aussagen läßt.

Es hat zunächst den Anschein, als würde sich die (durch die Axiome $\textcircled{A}$ und $\textcircled{B}$ definierte) Menge $\sum$ aller Zustandseigenschaften der VWSTh nur unwesentlich von einem "verallgemeinerten Propositionensystem" (i.e.v. Jauch und Piron^{17,23)}) unterscheiden: Durch die zusätzliche Annahme

$$x \nmid y \Rightarrow x \wedge y = \mathbb{O}, x \vee y = \mathbb{I} \quad (*)$$

geht $\sum$ tatsächlich in ein "verallgemeinertes Propositionensystem" über;

dazu muß man sich nur klar machen, daß unter der Annahme (*) die beiden Verträglichkeitsrelationen " $\sim$ " und " $\leftrightarrow$ " äquivalent sind.

Aber diese physikalisch unmotivierte, zusätzliche Annahme (*) ist nicht so "harmlos", wie es scheint.

Erstens widerspricht diese Annahme den Axiomen C. a. 6 und schließt damit gerade eine ensembletheoretische Formulierung der Quantentheorie aus. Zweitens widerspricht diese Annahme aber auch den physikalischen Vorstellungen von Jauch und Piron, die ja eine viel stärkere Propositionenstruktur annehmen. Das zeigt sich z.B. in der unterschiedlichen Interpretation der Eigenschaft $\text{Zentrum von } \Sigma = \{ \emptyset \cup I \}$ (**)

In der Interpretation der Propositionenstruktur von Jauch und Piron bedeutet (**) eine physikalisch unzulässige Zusatzannahme, die die Existenz von Überauswahlregeln ausschließt. In unserer Interpretation werden durch die Annahme (**) natürlich keine Überauswahlregeln ausgeschlossen, da es in der VWSTh auch bei trivialem Zentrum noch Propositionen P^α geben kann, deren Operator mit allen anderen - in den Paaren (Q, β) von Σ auftretenden - Operatoren vertauschbar ist.

[5.4] Die Aussagen unter (a) beziehen sich auf Annahmen in der Arbeit von Jauch und Piron¹⁷⁾. Die Aussagen unter (b) beziehen sich auf Annahmen in der Arbeit von Kamber¹⁶⁾.

[5.5] Um die Stärke der Annahme (4°) von Jauch und Piron beurteilen zu können, muß man sich klar machen, daß sie aus zwei verschiedenen Annahmen besteht, indem sie die gleiche Forderung an Makro- und Mikrozustände stellt. Bei der Formulierung von Korrolar 5.2 haben wir diesen Umstand berücksichtigt.

[5.6] Diese Definition einer VPTh ist bewußt so allgemein wie möglich gehalten. Fast alle Autoren (z.B. ¹⁶ - 20, 24, 25)), die die Möglichkeit von VPTh'en untersucht haben, gehen dabei von einer so engen Definition der VPTh'en aus, daß z.B. die Bohmsche VPTh von vornherein "per definitionem" ausgeschlossen wird.

[5.7] Der allgemeine Ansatz (5.2a) enthält eine relativ starke Auslegung der oben formulierten Eigenschaft (1) aller VPTh'en: Er setzt nämlich die selben "abgeschlossenen Systeme" voraus wie die Quantenmechanik.

Diese Annahme ist keineswegs selbstverständlich⁶⁾.

[5.8] Siehe die Arbeiten^{16 - 20, 23 - 25)} des Literaturverzeichnisses. Dabei haben wir nur solche Arbeiten aufgeführt, die uns für die vorliegende Arbeit relevant erschienen.

[5.9] Solche Diskussionen finden sich z.B. in den Arbeiten von Bohm^{11,26)} und vor allem in der Arbeit von Bell¹³⁾.

9. Zusammenstellung wichtiger Bezeichnungen

$\mathcal{H}$	:= Hilbertraum des betrachteten physikalischen Systems
$S_p(A)$	:= Spur des Operators A
$S_p T(A)$	:= Spektrum des Operators A
WSTh	:= ursprüngliche Differentialraum-Quantentheorie von N. Wiener und A. Siegel
VWSTh	:= "verbesserte" WSTh
VPTh	:= Theorie mit "verborgenen Parametern"
$^\circ A^\alpha$	:= Observablenwertfunktion zur Observablen A^α
μ_w^ε	:= Maß zum Makrozustand W^ε
$\hat{W}$	:= Zustandsoperator mit der Eigenschaft $S_p(\hat{P}\hat{W}) > 0$ für alle $P \neq 0$ aus $\mathcal{K}$ ("extrem unscharfer" Zustandsoperator)
$\mathcal{M}_p^\alpha$	:= Trägermenge der Indikatorfunktion $^\circ p^\alpha$
$\mathcal{P}$	:= Menge aller Mengen $\mathcal{M}_p^\alpha$
$\mathcal{F}$	:= von $\mathcal{P}$ erzeugte (endliche) Algebra
$\tilde{\forall} \alpha$	:= für alle zulässigen Zerlegungen der Einheit α
$\overset{\circ\circ}{\forall} x$	:= für fast alle x bezüglich aller Maße der VWSTh

10. Literaturverzeichnis

- 1) W. Heisenberg "The Development of the Interpretation of the
Quantum Theory" in: Niels Bohr and the Develop-
ment of Physics
ed. by W. Pauli, London 1955
- 2) N. Bohr Atomphysik und menschliche Erkenntnis
Braunschweig 1958
- 3) D. Bohm Quantum Theory, New York 1951
- 4) A. Einstein in "Albert Einstein, Philosoph-Scientist"
The Library of Living Philosophers,
Vol. 7, p.p. 665 ff, Evanston 1949
- 5) D. Bohm Phys. Rev. 84, 166, 1951 und 85, 180, 1952
- 6) D. Bohm Causality and Chance in Modern Physics,
London 1957
- 7) N. Wiener und A. Siegel
A New Form for the Statistical Postulate
of Quantum Mechanics,
Phys. Rev. 91, 1551, 1953
- 8) N. Wiener und A. Siegel
The Differential-Space Theory of Quantum Systems,
Nuov. Cim. Suppl. 2 Ser. X, 982, 1955
- 9) A. Siegel und N. Wiener
"Theory of Measurement" in Differential-Space
Quantum Theory,
Phys. Rev. 101, 429, 1956
- 10) A. Siegel "The Differential-Space Quantum Theory of
Quantum Systems", in "Differential-Space,
Quantum Systems and Prediction" ed. by N. Wiener
The M.I.T. Press, Cambridge (Mass) 1966
- 11) W. Ochs "Über die Wiener-Siegelsche Formulierung der
Quantentheorie", Diplomarbeit,
Frankfurt a.M. 1964
- 12) A.M. Gleason Measures on the closed Subspaces of a Hilbert-
Space
Journ. of Math. and Mech. 6, 1957
- 13) J.S. Bell On the Problem of Hidden Variables in Quantum
Mechanics
Rev.mod.Phys. 38, 447, 1966

- 14) G. Süßmann Über den Meßvorgang
Bayer.Akad.Wiss., Math.-Nat.Kl.,
N.F. Heft 88, 1958
- 15) G.C.Wick, A.S.Wightman and E.P.Wigner
Phys.Rev. 88, 101, 1952
- 16) F. Kamber Die Struktur des Aussagenkalküls in einer
physikalischen Theorie
Nachr.Akad.Wiss. Göttingen 10, 103, 1964
- 17) J.M. Jauch and C. Piron
Can Hidden Variables be excluded in Quantum
Mechanics?
Helv. phys. Acta 36, 827, 1963
- 18) F. Kamber Zweiwertige Wahrscheinlichkeitsfunktionen auf
orthokomplementären Verbänden
Math.Ann. 158, 158, 1965
- 19) S.P. Gudder Rev.mod.Phys. 40, 229, 1968
- 20) N.Zierler und M.Schlessinger
Boolean Embeddings of Orthomodular Sets and
Quantum Logic
- 21) J.S. Bell On the Einstein-Podolsky-Rosen Paradox
Physics, 1, 195, 1964
- 22) J. Schwartz in "Integration of Functionals"
by K.O.Friedrichs et.al.
New York University, 1957
- 23) C. Piron Axiomatique Quantique
Helv. phys. Acta 37, 439, 1964
- 24) Misra Nuovo Cim. 47, 841, 1967
- 25) J.M. Jauch Foundations of Quantum Mechanics,
Reading (Mass.) 1968
- 26) D. Bohm and J. Bub
Rev.mod.Phys. 38, 470, 1966

Meinem verehrten Lehrer, Herrn Prof. Dr. G. Süßmann, möchte ich an dieser Stelle herzlich danken für sein lebhaftes Interesse an dieser Arbeit und für viele wertvolle und anregende Diskussionen. Auch Herrn Prof. Dr. H. Dinges habe ich für klärende Diskussionen zu danken.

Dem Centre d'Etudes Nucléaires de Saclay, wo diese Arbeit begonnen wurde, und besonders Herrn Prof. Dr. C. Bloch gilt mein aufrichtiger Dank für die mir erwiesene herzliche Gastfreundschaft.

Dem Commissariat à l'Energie Atomique und der Deutschen Forschungsgemeinschaft bin ich für die finanzielle Unterstützung dieser Arbeit sehr zu Dank verpflichtet.

Lebenslauf

Am 2. März 1936 wurde ich in Frankfurt am Main als Sohn des Bäckermeisters Wilhelm Ochs und seiner Ehefrau Maria geboren. Meine Kindheit verbrachte ich in Frankfurt, Stornfels und Schmitten, wohin meine Eltern evakuiert worden waren. Im Herbst 1946 wurde ich in das bischöfliche Konvikt und das staatliche Gymnasium in Hadamar aufgenommen. 1952 zog meine Familie wieder nach Frankfurt, und ich besuchte dort weiter das Gymnasium bis zum Abitur am 1. März 1957. Danach begann ich das Studium der Physik an der Frankfurter Johann Wolfgang Goethe-Universität. Nach der Diplomvorprüfung, die ich am 23. Mai 1960 ablegte, wandte ich mich der theoretischen Physik zu und begann 1961 im Institut für theoretische Physik meine Diplomarbeit unter Anleitung von Professor Dr. G. Süßmann. In Frankfurt legte ich auch am 14. Dezember 1964 die Diplom-Hauptprüfung in Physik ab. Danach erhielt ich ein Stipendium der Französischen Republik und studierte bis zum Sommer 1966 im Centre d'Etudes Nucléaires de Saclay. Seit September 1966 arbeite ich im Institut für theoretische Physik der Universität Frankfurt unter Anleitung von Professor Dr. G. Süßmann an meiner Dissertation.

Meine akademischen Lehrer waren die Professoren R. Baer, F. Beck, E.A. Behrens, H. Dänzer, H. Dinges, B. Mrowka, A. Münster, P. Royen, G. Süßmann und M. Szerny.

